ISFA - L3 Actuariat
Probabilités Avancées
Semestre printemps 2018-2019

**Feuille de TD n° 9:**
ESPÉRANCE CONDITIONNELLE DISCRÈTE ET À DENSITÉ

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

# 1 Espérance conditionnelle discrète

Soit $X$ et $Y$ deux v.a définies sur un même espace de probabilités. On suppose que $Y$ est une v.a discrète. Si $X$ est intégrable, on définit alors *l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $Y$* comme la variable aléatoire :

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right] := \sum_y \mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y=y\right] \mathbf{1}_{\{Y=y\}},$$

où $\mathbb{E}\left[\cdot \,\middle|\, Y=y\right]$ est l'espérance sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|Y=y)$ :

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y=y\right] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=y\}}]}{\mathbb{P}(Y=y)}.$$

**Exercice 1 : Somme d'un nombre aléatoire de v.a i.i.d**

Soit $N$ une variable aléatoire intégrable à valeur dans $\mathbb{N}$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a i.i.d de carré intégrable et indépendante de $N$. Soit $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left[S \,\middle|\, N\right]$ puis $\mathbb{E}\left[S\right]$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[S^2 \,\middle|\, N\right]$ puis en déduire $\mathbb{E}\left[S^2\right]$ puis que

$$\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N)\mathbb{E}[X_1]^2.$$

3. Retrouvez ce résultat en calculant directement $\mathrm{Var}\left(S \,\middle|\, N\right)$ et en utilisant la formule de décomposition de la variance :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}\left(X \,\middle|\, Y\right)\right] + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right]\right).$$

**Exercice 2 : Combien faut-il lancer de dés ?**

On considère le jeu suivant. Vous choisissez un nombre $n$ de dés équilibrés à 6 faces. Votre score est égale à la somme des résultats des dés si aucun dé n'est tombé sur 1 et est nul sinon ! Quelle est l'espérance du score sachant qu'aucun dé n'est tombé sur 1 ? Combien de dés avez vous intérêt à lancer pour maximiser votre espérance de gain ?

**Exercice 3 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{1\le i\le n}$ des v.a i.i.d intégrables. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Calculer $\mathbb{E}\left[S_n \,\middle|\, X_1\right]$ et $\mathbb{E}\left[X_1 \,\middle|\, S_n\right]$.

Indication : comparer les $\mathbb{E}\left[X_i \,\middle|\, S_n\right]$ pour $1 \le i \le n$.

**Exercice 4 :**

Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires de Poisson indépendantes et de paramètre $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

1. Quelle est la loi conditionnelle de $X_1$ sachant $X_1 + X_2$ ?
2. Calculer $\mathbb{E}\left[X_1 \,\middle|\, X_1 + X_2\right]$.

# 2 Espérance conditionnelle à densité

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles telles que $(X, Y)$ admet une densité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesque 2-dimensionnelle. La densité marginale de $Y$ est $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$.

Alors, pour tout $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable :

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X) \,\middle|\, Y\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, f_{X|Y}(x,Y)dx,$$

où $f_{X|Y}(x,y) := \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ est la densité conditionnelle de $X$ sachant $Y = y$.

**Exercice 5 : Variables aléatoires sur le disque unité**

Soit $(X,Y)$ un vecteur de $R^2$ distribué uniformément sur le disque fermé de rayon unité. Calculer la densité conditionnelle de $X$ sachant $Y$.

**Exercice 6 :**

Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires Exponentielles indépendantes et de paramètre $\lambda$.

1. Quelle est la densité de probabilité de $X_1 + X_2$ ?
2. Quelle est la loi conditionnelle de $X_1$ sachant $X_1 + X_2$ ?

**Exercice 7 :**

Soient $U_1$ et $U_2$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}[0,1]$. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.
Calculer $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right]$ et $\mathbb{E}\left[Y \,\middle|\, X\right]$.

**Exercice 8 : Calcul d'espérances conditionnelles**

Calculer $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right]$ lorsque la loi du couple $(X,Y)$ admet la densité :

1. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} x e^{-y^2/2} 1_{\{0<y<x\}}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{y}\exp(-\dfrac{x}{y} - y)\mathbf{1}_{]0,+\infty[^2}(x,y)$
3. $f(x,y) = \dfrac{12}{5}x(2 - x - y)\mathbf{1}_{]0,1[^2}(x,y)$.

**Exercice 9 : [Un exercice de l'examen de 2013]**

Soit $(X,Y)$ un vecteur aléatoire de densité :

$$f(x,y) = 4y(x-y)\exp(-(x+y))\mathbf{1}_{\{0\le y\le x\}}\,.$$

Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{P}\left[X < 1 \,\middle|\, Y = y\right]$.

## 3 Espérance conditionnelle : cas général

Soit $X$ une v.a réelle intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu. On définit *l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $\mathcal{G}$*, notée $\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathcal{G}\right]$, comme l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable vérifiant que :

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathcal{G}\right]\mathbf{1}_A\right].$$

Si $Y$ est une v.a définie sur le même espace et est à valeur dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, on définit :

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, Y\right] := \mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \sigma(Y)\right],$$

où $\sigma(Y) := \{Y^{-1}(A),\ A \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{F}$ est la tribu engendrée par $Y$.

**Exercice 10 :**

Montrer que cette définition générale coïncide avec les définitions vues précédemment pour les cas discrets et à densité.

**Exercice 1** : **Somme d'un nombre aléatoire de v.a i.i.d**

Soit $N$ une variable aléatoire intégrable à valeur dans $\mathbb{N}$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a i.i.d de carré intégrable et indépendante de $N$. Soit $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left[S \middle| N\right]$ puis $\mathbb{E}[S]$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[S^2 \middle| N\right]$ puis en déduire $\mathbb{E}\left[S^2\right]$ puis que
$$\mathrm{Var}(S)=\mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(N)\mathbb{E}[X_1]^2.$$
3. Retrouvez ce résultat en calculant directement $\mathrm{Var}\left(S \middle| N\right)$ et en utilisant la formule de décomposition de la variance :
$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\left[\mathrm{Var}\left(X\middle|Y\right)\right]+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left[X\middle|Y\right]\right).$$

$N$ v.a discrète (à valeurs dans $\mathbb{N}$)

$S_N = X_1 + \dots + X_N$

$S_N(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_N(\omega)$

On note $E = \{n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(N=n)>0\}$

1) Calcule de $E[S_N|N]$

1ère étape : On calcule $E[S_n | N=n]$ avec $n\in E$

$$= \frac{E[S_N \mathbb{1}_{N=n}]}{\mathbb{P}(N=n)} \qquad \mathbb{P}(B|A) = \frac{E(B\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{E[S_n \mathbb{1}_{N=m}]}{\mathbb{P}(N=m)}$$

$$(S_N\mathbb{1}_{N=m})(\omega) = S_N(\omega)\mathbb{1}_{N=n}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(\omega)\neq n \\ S_{\underbrace{N(\omega)}_{n}}(\omega) & \text{si } N(\omega)=n \end{cases}$$

$S_n$ est indép de $\mathbb{1}_{N=n}$

$$\Rightarrow E[S_N | N=n] = \frac{E[S_n]\,E[\cancel{\mathbb{1}_{N=n}}]}{\mathbb{P}(\cancel{N=n})} = E[S_n] \overset{\text{i.i.d}}{=} nE[X_1]$$

Finalement $E[S_N|N] = \sum_{n\in E} E[S_N|N=n]\,\mathbb{1}_{N=m}$

$$= \sum_{n\in E} nE[X_1]\,\mathbb{1}_{N=m}$$

$$= E[X_1]\sum_{n\in E} n\,\mathbb{1}_{N=m}$$

$E[S_N] = E[E[S_N|N]]$

$E[S_N|N]$ est l'unique v.a $\sigma(N)$ mesurable et qui vérifie, $E[S_N\mathbb{1}_B] = E[E[S_N|N]\mathbb{1}_B]$ où $B\in\sigma(N)$ en particulier lorsque $B=\Omega$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n \in E}^{N} n\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{N=n}]$$

$$= \mathbb{E}[X_1] \sum n\, \mathbb{P}(N=n)$$

Or $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus E} n\, \mathbb{P}(N=n) = 0$

donc $\displaystyle\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n \in \mathbb{N}} n\, \mathbb{P}(N=n)$

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\, \mathbb{E}[X_1]$$