Feuille de TD n° 7:

Convergence en loi et Théorème Central Limite

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

On rappelle le théorème de Paul Lévy :

Théorème 1 (Paul Lévy) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ de fonctions caractéristiques ϕ_{X_n} et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$ de fonction caractéristique ϕ_X. Alors*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \iff \left(\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \phi_{X_n}(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi_X(\xi)\right).$$

On rappelle aussi une partie de théorème de Portmanteau :

Théorème 2 (Portmanteau) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

— $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$

— *pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, on a*

$$\mathbb{P}(X_n \in A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \in A).$$

Remarque : c'est ce théorème qui est à l'origine de la caractérisation de la convergence en loi par les fonctions de répartitions.

Exercice 1 : Convergence de la loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda_n)$. On suppose que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X_n.
2. Montrer que
$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1).$$
3. On suppose maintenant que $\lambda_n = n$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 : Le Théorème Central Limite

Le but de l'exercice est de montrer le théorème central limite :

Théorème 3 (Théorème Central Limite) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a i.i.d de carré intégrable. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Alors*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\, \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

1. Renormalisation : On pose $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$. Montrer que les $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite de v.a réelles i.i.d de moyenne nulle et de variance 1 (on dit que les Y_i sont centrés réduits).
2. Fonction caractéristique : On pose $Z_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Montrer que la fonction caractéristique de Z_n vérifie :
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \phi_{Z_n}(\xi) = \left(\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$
3. Développement limité : Justifier que ϕ_{Y_1} est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $\phi_{Y_1}(0), \phi'_{Y_1}(0)$ et $\phi''_{Y_1}(0)$. En déduire, par la formule de Taylor que :
$$\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. Limite : En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\phi_{Z_n}(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right),$$
puis en conclure le résultat du Théorème Central Limite.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

Exercice 3 : Probabilités limites

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On considère $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(S_n \in I_n)$ quand n tend vers l'infini, lorsque

1. $I_n = [0,\ an]$, où $a \in [0,1]$,
2. $I_n = [pn - 1.96\sqrt{p(1-p)n},\ pn + 1.96\sqrt{p(1-p)n}]$.

Exercice 4 : Application du TCL aux sondages

Un institut de sondages souhaite estimer le pourcentage p de la population qui va voter pour le Maire actuel à la prochaine élection avec une précision de 1%. Pour cela, on interroge un échantillon de n personnes et on note F_n la fréquence empirique des intentions de vote pour le Maire.

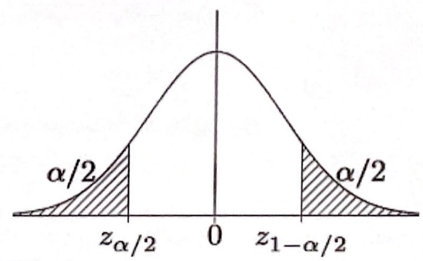
1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre n de personnes qu'il suffit d'interroger pour avoir un intervalle de confiance de précision 1% et de niveau 95% :

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geq 0.01) \leq 0.05$$

2. Même question en utilisant le théorème central limite.

Quantiles de la loi Normale centrée réduite.

Si Z est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, la table suivante donne, pour α fixé, la valeur $z_{1-\alpha/2}$ telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z_{1-\alpha/2}) = \alpha$. Ainsi, $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954
0,1	1,6449	1,5982	1,5548	1,5141	1,4758	1,4395	1,4051	1,3722	1,3408	1,3106
0,2	1,2816	1,2536	1,2265	1,2004	1,1750	1,1503	1,1264	1,1031	1,0803	1,0581
0,3	1,0364	1,0152	0,9945	0,9741	0,9542	0,9346	0,9154	0,8965	0,8779	0,8596
0,4	0,8416	0,8239	0,8064	0,7892	0,7722	0,7554	0,7388	0,7225	0,7063	0,6903
0,5	0,6745	0,6588	0,6433	0,6280	0,6128	0,5978	0,5828	0,5681	0,5534	0,5388
0,6	0,5244	0,5101	0,4959	0,4817	0,4677	0,4538	0,4399	0,4261	0,4125	0,3989
0,7	0,3853	0,3719	0,3585	0,3451	0,3319	0,3186	0,3055	0,2924	0,2793	0,2663
0,8	0,2533	0,2404	0,2275	0,2147	0,2019	0,1891	0,1764	0,1637	0,1510	0,1383
0,9	0,1257	0,1130	0,1004	0,0878	0,0753	0,0627	0,0502	0,0376	0,0251	0,0125

α	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$z_{1-\alpha/2}$	3,2905	3,8906	4,4172	4,8916	5,3267	5,7307	6,1094

On rappelle le théorème de Paul Lévy :

Théorème 1 (Paul Lévy) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ de fonctions caractéristiques ϕ_{X_n} et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$ de fonction caractéristique ϕ_X. Alors*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \iff \left(\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \phi_{X_n}(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi_X(\xi)\right).$$

On rappelle aussi une partie de théorème de Portmanteau :

Théorème 2 (Portmanteau) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

— $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$

— *pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, on a*

$$\mathbb{P}(X_n \in A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \in A).$$

Remarque : c'est ce théorème qui est à l'origine de la caractérisation de la convergence en loi par les fonctions de répartitions.

Exercice 1 : Convergence de la loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda_n)$. On suppose que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X_n.
2. Montrer que
$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1).$$
3. On suppose maintenant que $\lambda_n = n$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

CV en Loi + TCL

Exercice 1 :

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad X_n \sim Poi(\lambda_n)$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}$

$$\Phi_{X_n}(\xi) = E(e^{i\xi X_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\xi k} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n}$$
$$= e^{-\lambda_n} \sum \frac{(\lambda_n e^{i\xi})^k}{k!} = \exp(\lambda_n e^{i\xi} - \lambda_n)$$

2) But : $\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

On pose $Y_n = \frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{X_n}{\sqrt{\lambda_n}} - \sqrt{\lambda_n}$

$$\Phi_{Y_n}(\xi) = E(e^{i\xi Y_n}) = E\left(e^{i\xi \frac{X_n}{\sqrt{\lambda_n}}}\right) e^{i\xi\sqrt{\lambda_n}}$$

$$\Phi_{X_n}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\lambda_n}}\right) e^{i\xi\sqrt{\lambda_n}} = \left.\exp\left(\lambda_n e^{i\frac{\xi}{\sqrt{\lambda_n}}} - \lambda_n - i\xi\sqrt{\lambda_n}\right)\right\}$$ forme indéterminé

Comme $\xi_n \to 0$ on peut utiliser un DL de l'exp de ξ_n

$e^{-i\xi/\sqrt{\lambda_n}} = e^{i\xi_n} = 1 + i\xi_n - \frac{\xi_n^2}{2} + o(\xi_n^2)$

$\Leftrightarrow e^{-i\xi/\sqrt{\lambda_n}} - 1 - i\xi/\sqrt{\lambda_n} = \frac{-\xi_n^2}{2} + o(\xi_n^2)$

DL : $f \in \mathcal{C}^n$, a.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)}{k!} + o(x-a)$$

$$\lambda_n\left(e^{i\xi/\sqrt{\lambda_n}} - 1 - i\xi/\sqrt{\lambda_n}\right) = \lambda_n\left(\frac{-\xi_n^2}{2} + \underset{n\to\infty}{o}(\xi_n^2)\right)$$

$$= \lambda_n \mathfrak{z}_n^2 \left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \xrightarrow[n\infty]{} -\frac{\mathfrak{z}^2}{2}$$

Par continuité de l'exp :

$$\phi_{Y_n}(\mathfrak{z}) \longrightarrow \exp\left(-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}\right) = \text{fonction caractéristique } \mathcal{N}(0,1)$$

3) $$e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2}$$

Or $$e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k)$$
$$= \mathbb{P}(X_n \leq n)$$

Donc, $$e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(X_n \leq n)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \in]-\infty, 0]\right)$$
$$\xrightarrow[n\infty]{} \mathbb{P}(X \in]-\infty, 0]) \text{ où } X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}(X \in]-\infty, 0]) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}$$

<u>Exercice 2</u> : Le Théorème Central Limite

Le but de l'exercice est de montrer le théorème central limite :

Théorème 3 (Théorème Central Limite) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a i.i.d de carré intégrable. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Alors*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

1. <u>Renormalisation</u> : On pose $Y_i = \dfrac{X_i-\mu}{\sigma}$. Montrer que les $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite de v.a réelles i.i.d de moyenne nulle et de variance 1 (on dit que les Y_i sont centrés réduits).
2. <u>Fonction caractéristique</u> : On pose $Z_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Montrer que la fonction caractéristique de Z_n vérifie :
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \phi_{Z_n}(\xi) = \left(\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$
3. <u>Développement limité</u> : Justifier que ϕ_{Y_1} est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $\phi_{Y_1}(0), \phi'_{Y_1}(0)$ et $\phi''_{Y_1}(0)$. En déduire, par la formule de Taylor que :
$$\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. <u>Limite</u> : En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\phi_{Z_n}(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right),$$
puis en conclure le résultat du Théorème Central Limite.

Ex 2 :

1) $Y_n = \dfrac{X_n-\mu}{\sigma} \in L^2$

et les Y_n sont i.i.d car les X_n le sont

Y_n est une fctn° mesurable de X_n

2) $E(Y_n) = \dfrac{1}{\sigma}\left(\underset{\shortparallel}{E(X_n)} - \mu\right) = 0$

$Var(Y_n) = \dfrac{1}{\sigma^2} Var(X_n) = 1$

$Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

$\phi_{Z_n}(\xi) = E\left[\exp\left(i\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right)\right] = E\left[\prod \exp\left(i\xi\frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)\right.$

les Y_i sont i.i.d $= \prod_{i=1}^{n}\phi_{Y_i}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{i=1}^{n}\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)$

$= \left(\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

3) Comme $Y_1 \in L^2$, d'où $\phi_{Y_1} \in \mathcal{C}^2$

$\phi_{Y_1}(\xi) = E[e^{i\xi Y_1}]$ qui est dérivable par le théorème de dérivation sous le signe intégrale

$|\partial_\xi(e^{i\xi Y_1})| = |iY_1 e^{i\xi Y_1}| \leq |Y_1| \in L^1$

donc, $\phi_{Y_1}'(\xi) = E[\partial_\xi(e^{i\xi Y_1})] = E[iY_1 e^{i\xi Y_1}]$

$\phi_{Y_1}'(0) = iE(Y_1)$

de même, $\phi_{Y_1}''(0) = -E[Y_1^2] = -Var(Y_1) = -1$

Finalement: $\phi_Y\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = \phi_{Y_1}(0) + \phi_{Y_1}'(0)\frac{\xi}{\sqrt{n}} + \frac{\phi_{Y_1}''(0)}{2}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

4) $\phi_{Z_n}(\xi) = \left(\phi_{Y_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{\xi^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

Comme z est fixé, pour n assez grand on a
$1-\frac{z^2}{2n}+o(\frac{1}{n})>0$ et l'égalité précédente
reste vraie

$$n\ln\left(1-\frac{z^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n\ln(1+x_n)$$
$$=n\left(x_n+o(x_n)\right)$$
$$=n\left(-\frac{z^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=-\frac{z^2}{2}+o(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\frac{z^2}{2}$$

Par continuité de l'exp on a

$$\phi_{Z_n}(z)\longrightarrow\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)=f.c\sim\mathcal{N}(0,1)$$