ISFA - L3 Actuariat
Probabilités Avancées
Semestre printemps 2018-2019

Feuille de TD n° 6:

CONVERGENCE EN LOI

math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1 : Autour de la convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$.

1. Rappeler la définition de la convergence en loi notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$.
2. Montrer que si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$ et que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est continue, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{loi} f(X)$
3. On rappelle que la convergence en probabilité implique la convergence en loi. Inversement, montrer que la convergence en loi vers une constante $c \in \mathbb{R}^d$ implique la convergence en probabilité vers c. On pourra utiliser la fonction continue bornée $f_\varepsilon(x) = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\|x-c\|\right)$ et l'inégalité $\mathbf{1}_{\|x-c\|\geq\varepsilon} \leq f_\varepsilon(x)$ valable pour tout x dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2 : Convergence en loi du maximum de v.a i.i.d

On rappelle que pour des variables aléatoires réelles

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \iff \left(F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x),\ \text{ pour tout } x \text{ où } F_X \text{ est continue}\right)$$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a i.i.d. On définit :

$$X_n = \max(U_1, ..., U_n).$$

1. On suppose que $U_1 \sim \mathcal{U}([0,\theta])$
   (a) Calculer la fonction de répartition de X_n. (On pourra se souvenir de l'exercice 2 de la feuille de TD 4.
   (b) Montrer que
   $$\frac{n(\theta - X_n)}{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} Y,$$
   où Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
2. On suppose que $U_1 \sim \mathcal{E}(1)$
   (a) Calculer la fonction de répartition de X_n. (On pourra se souvenir de l'exercice 3 de la feuille de TD 4.
   (b) Montrer que
   $$X_n - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} Z,$$
   où Z suit une loi de Gumbel caractérisée par sa fonction de répartition
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Exercice 3 : Convergence en loi pour des v.a continues

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ de loi donnée par une densité f_n et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$ de loi donnée par une densité f. On rappelle que si f_n converge presque partout vers f, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$.

1. On suppose que $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$ et que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{E}(\lambda)$.
2. On suppose que $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ et que $(\mu_n, \sigma_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mu, \sigma)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exercice 4 : Convergence en loi pour des v.a discrètes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{N}$ et X une v.a dans $\mathbb{N}$. On rappelle que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \iff \left(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k)\right).$$

1. On suppose que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \text{Poi}(\theta)$
2. Application : Une société de location de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louée ait un accident est égale à $0,2\%$. On suppose que les accidents sont indépendants les uns des autres. Chaque jour, 1000 voitures de la société sont en circulation. On note N le nombre de voitures accidentées.
   (a) Quelle est la loi de N ?
   (b) Donner une valeur approchée de la probabilité pour qu'il y ait au moins 5 voitures accidentées dans la journée.

Exercice 5 : Convergence en loi de v.a discrètes vers une v.a continue et vice-versa

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a réelles.

1. On suppose que X_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Montrer que
$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{U}([0,1]).$$
2. On suppose que $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ et que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ avec $\theta > 0$. Montrer que
$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{E}(\theta).$$
3. On suppose que $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n)$ et que $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} 0.$$

Exercice 1 : Autour de la convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$.

1. Rappeler la définition de la convergence en loi notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$.
2. Montrer que si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$ et que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est continue, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{loi} f(X)$
3. On rappelle que la convergence en probabilité implique la convergence en loi. Inversement, montrer que la convergence en loi vers une constante $c \in \mathbb{R}^d$ implique la convergence en probabilité vers c. On pourra utiliser la fonction continue bornée $f_\varepsilon(x) = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\|x-c\|\right)$ et l'inégalité $\mathbf{1}_{\|x-c\|\geq\varepsilon} \leq f_\varepsilon(x)$ valable pour tout x dans $\mathbb{R}^d$.

Convergence en Loi

$X \sim \mu = \mathbb{P}_X$

La Loi d'une variable aléatoire est encodée par une mesure

définition : $\mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow{e} \mathbb{P}_X$, X_n v.a dans $\mathbb{R}^d$

$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mathbb{P}_{X_n}(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mathbb{P}_X(x) \quad \forall f$ cont° bornée

$E[f(X_n)] \longrightarrow E[f(X)]$

$\phi_{X_n} \longrightarrow \phi_X \quad \forall x$ où ϕ_X est continue

$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x) \quad \forall x$ où F_X est continue

cas discret : X_n, X à valeurs dans $\mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$

1) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et f continue

Mq : $f(X_n) \longrightarrow f(X)$

Soit φ fonction continue bornée :

On étudie $E[\varphi(f(X_n))] = E[(\varphi\circ f)(X_n)]$

comme $\varphi\circ f$ est continue bornée (par composition de fctns cont°)

et bornée car φ l'est

D'où $E[(\varphi\circ f)(X_n)] \longrightarrow E[(\varphi\circ f)(X)]$

en utilisant la caractérisation de $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ par les fctns cont bornées

On en déduit que $f(X_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(X)$

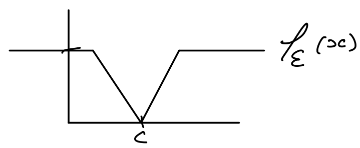
3) $\mathbb{P} \Rightarrow \mathcal{L}$

Montrer une réciproque partielle

Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R}^d$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Soit $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon)$, $d(X,Y) = \min(1, |X-Y|)$

on pose $f_\varepsilon(x) = \min\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}|x-c|\right\}$



On remarque que $\mathbb{1}_{|x-c|\geq\varepsilon} = \mathbb{1}_{\frac{1}{\varepsilon}|x-c|\geq 1} \leq f_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow \mathbb{1}_{|X_n-c|\geq\varepsilon} \leq f_\varepsilon(X_n)$ p.s

$\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) = E[\mathbb{1}_{|X_n-c|\geq\varepsilon}] \leq E[f_\varepsilon(X_n)] \longrightarrow E[\underbrace{f_\varepsilon(c)}_{=0}]$

Donc, $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Exercice 2 : Convergence en loi du maximum de v.a i.i.d

On rappelle que pour des variables aléatoires réelles

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \iff \left(F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x), \text{ pour tout } x \text{ où } F_X \text{ est continue}\right)$$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a i.i.d. On définit :

$$X_n = \max(U_1, ..., U_n).$$

1. On suppose que $U_1 \sim \mathcal{U}([0,\theta])$
   (a) Calculer la fonction de répartition de X_n. (On pourra se souvenir de l'exercice 2 de la feuille de TD 4.
   (b) Montrer que
   $$\frac{n(\theta - X_n)}{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} Y,$$
   où Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
2. On suppose que $U_1 \sim \mathcal{E}(1)$
   (a) Calculer la fonction de répartition de X_n. (On pourra se souvenir de l'exercice 3 de la feuille de TD 4.
   (b) Montrer que
   $$X_n - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} Z,$$
   où Z suit une loi de Gumbel caractérisée par sa fonction de répartition
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = e^{-e^{-x}}.$$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a i.i.d $\quad X_n = \max(U_1, \dots, U_n)$

1) $U_1 \sim \mathcal{U}([0,\theta])$

a) $F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$

$= \mathbb{P}(U_1 \leq x, \dots, U_n \leq x)$

$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i \leq x)$ par indépendance

$= \left(\mathbb{P}(U_1 \leq x)\right)^n = \left(\mathbb{P}(0 \leq U_1 \leq x)\right)^n = \left(\frac{x-0}{\theta-0}\right)^n$

$= \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \quad x \in [0,\theta]$ et $\theta > 0$

Si $x < 0$, $\mathbb{P}(X_n \leq x) = 0$

Si $x \geq \theta$, $\mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_n \leq \theta) = 1$

$$F_{X_n}(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\theta]} + \mathbb{1}_{]\theta,+\infty[}$$

2) Montrer que $\frac{n(\theta - X_n)}{\theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, $\quad Y \sim \mathcal{E}(1)$

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{n(\theta - X_n)}{\theta} \leq x\right)$$

$= \mathbb{P}\left(\frac{n\theta - \theta x}{n} \leq X_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_n \leq \theta\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$

$= 1 - F_{X_n}\left(\theta\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$

- Si $x < 0$, alors $\theta(1 - \frac{x}{n}) > \theta$

donc $F_{Y_n}(x) = 1 - F_{X_n}(\theta(1 - \frac{x}{n})) = 1 - 1 = 0$

- Si $x > 0$ pour n assez grand, $0 \leq \theta(1 - \frac{x}{n}) \leq \theta$

donc $F_{Y_n}(x) = 1 - F_{X_n}(\theta(1 - \frac{x}{n})) = 1 - \left(\frac{\theta(1 - \frac{x}{n})}{\theta}\right)^n$

$$F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - \frac{x}{n})^n \xrightarrow[n\infty]{} 1 - e^{-x}$$

Donc $F_{Y_n}(x) \longrightarrow \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)(1 - e^{-x})}_{F \text{ d'une loi } \mathcal{E}(1)}$

et $\frac{n(\theta - X_n)}{\theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$

Exercice 3 : **Convergence en loi pour des v.a continues**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{R}^d$ de loi donnée par une densité f_n et X une v.a dans $\mathbb{R}^d$ de loi donnée par une densité f. On rappelle que si f_n converge presque partout vers f, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$.

1. On suppose que $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$ et que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{E}(\lambda)$.
2. On suppose que $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ et que $(\mu_n, \sigma_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mu, \sigma)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

$\mathbb{P}_{X_n} = f_n \, d\lambda$

$\mathbb{P}_X = f \, d\lambda$

Rappel : Si $f_n \xrightarrow{P.P} f \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

1) On suppose que $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$, $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \longrightarrow \lambda > 0$

Densité : $f_{X_n}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda_n e^{-\lambda_n x} \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$

donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(\lambda)$

2) IDEM

Exercice 4 : Convergence en loi pour des v.a discrètes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a dans $\mathbb{N}$ et X une v.a dans $\mathbb{N}$. On rappelle que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X \iff \left(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X=k)\right).$$

1. On suppose que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathrm{Poi}(\theta)$
2. Application : Une société de location de voitures a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louée ait un accident est égale à 0,2%. On suppose que les accidents sont indépendants les uns des autres. Chaque jour, 1000 voitures de la société sont en circulation. On note N le nombre de voitures accidentées.
   (a) Quelle est la loi de N ?
   (b) Donner une valeur approchée de la probabilité pour qu'il y ait au moins 5 voitures accidentées dans la journée.

4) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a discrète (à valeurs dans $\mathbb{N}$), $X \in \mathbb{N}$

1) $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ tq $np_n \to \theta$

Mq $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{Poi}(\theta)$, $X \sim \mathrm{Poi}(\theta)$ si $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

On étudie $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$ où $\theta_n = np_n \to \theta$

$$= \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1) \left(\frac{\theta_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\theta_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \prod_{0}^{k-1} (n-i) \frac{1}{n^k} \theta_n^k \left(1 - \frac{\theta_n}{n}\right)^n \times \frac{1}{\left(1-\frac{\theta_n}{n}\right)^k}$$

$$\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!} \frac{n^k}{n^k} \theta^k e^{-\theta} \times \frac{1}{1^k} = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{Poi}(\theta)$

Exercice 5 : **Convergence en loi de v.a discrètes vers une v.a continue et vice-versa**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a réelles.

1. On suppose que X_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Montrer que
$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{U}([0,1]).$$
2. On suppose que $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ et que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ avec $\theta > 0$. Montrer que
$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{E}(\theta).$$
3. On suppose que $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n)$ et que $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} 0.$$

1) $X_n \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$

But : $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{U}([0,1])$

Soit φ cont° bornée. $E\left[\varphi\left(\frac{X_n}{n}\right)\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{X_n}{n}\right) \mathbb{1}_{X_n=k}\right]$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{E\left[\mathbb{1}_{X_n=k}\right]}_{\mathbb{P}(X_n=k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(0 + \frac{k}{n}(1-0)\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx = E(\varphi(X))$$

où $X \sim \mathcal{U}[0,1]$