ISFA Lyon
L3 Actuariat
Probabilités Avancées

2018 - 19
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

TD 3 - Vecteurs Gaussiens I

Exercice 1
Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Quelles sont les valeurs de ρ pour lesquelles Σ est bien une matrice de covariance ?
   (b) Quelles sont les valeurs de ρ pour lesquelles (X_1, X_2) est non dégénéré ?
2. Quelle est la fonction caractéristique de (X_1, X_2) ?
3. (a) Montrer que $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ est aussi un vecteur gaussien.
   (b) Quelle est sa matrice de covariance ?
   (c) En déduire que $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$ sont indépendants.
   (d) quelles sont les fonctions caractéristiques de $X_1 - X_2$,$X_1 + X_2$ et du vecteur $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$?
4. Soit Y_1, Y_2 deux variables aléatoires gaussiennes dont la matrice de covariance est Σ. Les variables aléatoires $Y_1 - Y_2$ et $Y_1 + Y_2$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2
Soit $X := (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Σ.

1. (a) Montrer que pour toute matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, MX est aussi un vecteur gaussien.
   (b) Quelle est sa matrice de covariance ?
2. On suppose que X est non-dégénéré. Montrer qu'il existe $Y := (Y_1, \ldots, Y_n)$, un vecteur gaussien de matrice de covariance I_n, et une matrice A telle que $X = AY$ (Rappel : une matrice symétrique semi-définie positive est le carrée d'une autre matrice symétrique semi-définie positive).

Exercice 3 (Un exercice de l'examen de 2016)
On considère la matrice

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det \Sigma = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(9+1) = 20$$

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

1. Montrer que cette matrice est une matrice de covariance. positive car $\det \Sigma > 0$
2. On considère X un vecteur gaussien de matrice de covariance Σ. Est-ce que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, donner l'expression de cette densité en fonction de la moyenne $m = (m_1, m_2, m_3)$ de X.
3. Déterminer une matrice 3×3 inversible A telle que les composantes du vecteur AX soient indépendantes.
4. Dans le cas où le vecteur $X = (X_1, X_2, X_3)$ est centré, déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 - X_3$

Rappel : $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$

X est gaussien ssi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\langle \alpha, X \rangle = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i X_i$ est gaussienne

En particulier, les X_i sont des v.a gaussiennes.

Remarque : La réciproque est fausse c-a-d (X_i gaussienne $\forall i \in \{1, \ldots, d\} \not\Rightarrow X = \{X_1 \ldots X^d\}$ n'est pas forcément gaussien)

Exercice 1
Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Quelles sont les valeurs de ρ pour lesquelles Σ est bien une matrice de covariance ?
   (b) Quelles sont les valeurs de ρ pour lesquelles (X_1, X_2) est non dégénéré ?
2. Quelle est la fonction caractéristique de (X_1, X_2) ?
3. (a) Montrer que $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ est aussi un vecteur gaussien.
   (b) Quelle est sa matrice de covariance ?
   (c) En déduire que $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$ sont indépendants.
   (d) quelles sont les fonctions caractéristiques de $X_1 - X_2$, $X_1 + X_2$ et du vecteur $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$?
4. Soit Y_1, Y_2 deux variables aléatoires gaussiennes dont la matrice de covariance est Σ. Les variables aléatoires $Y_1 - Y_2$ et $Y_1 + Y_2$ sont-elles indépendantes ?

Notation : $m_X = (E(X_1), \dots, E(X^d))$

$\Gamma_X = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$

$\phi_X(u) = E(e^{i\langle u, x\rangle})$

$= \exp\left(i\langle u, m_X\rangle - \frac{{}^t u \Gamma_X u}{2}\right)$

Rq : X est entièrement caractérisé par m_X et Γ_X et on dit $X \sim \mathcal{N}(m_X, \Gamma_X)$

Propriété : $X = (X_1, \dots, X_d)$ gaussienne, $i = j$, X_i indep de X_j ssi $cov(X_i, X_j) = 0$

L'indépendance des composantes d'un vecteur gaussien se lit sur la matrice de covariance.

Exercice 1 : $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ gaussien centré (i.e $m_X = (0,0)$)

et $\Gamma_X = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : On dit que X est non dégénéré si Γ_X est inversible

Comme Γ_X est symmétrique positive, Γ_X est inversible ssi Γ_X est défini.

Γ_X est définie ssi $\forall x \in \mathbb{R}^d$, ${}^t x \, \Gamma_X \, x = 0$

1(a) La matrice Σ est symétrique. Cherchons les valeurs de ρ telle que Σ soit positive

Rappel : Si A est une matrice symmétrique, A est positive ssi toute ses valeurs propres sont positives. A est définie positive ssi toutes ses valeurs propres sont positives.

Polynôme caractéristique :

$P_\Sigma(\lambda) = \det(\Sigma - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \rho \\ \rho & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \rho^2$

$= ((1-\lambda) - \rho)(1 - \lambda + \rho) = (1-\rho-\lambda)(1+\rho-\lambda) = 0$ quand $\lambda = 1-\rho$ et $\lambda = 1+\rho$

Les valeurs propres de Σ sont $1-\rho$ et $1+\rho$

Donc Σ est positive ssi $1-\rho \geq 0$ et $1+\rho \geq 0$

donc ssi $|\rho| \leq 1$

Pour les valeurs de ρ tq $|\rho| \leq 1$, Σ est bien une matrice de covariance.

b) X est dégénéré ssi Σ est définie positive
donc ssi $|\rho| < 1$

2) f.c de (X_1, X_2)

Comme X est supposé centré, d'où $m_X = (0,0)$

$$\phi_X(u) = \exp\left(-\frac{{}^t u \Gamma_X u}{2}\right) \quad \text{avec} \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

$${}^t u \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} u = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 + 2\rho u_1 u_2$$

$$\phi_X(u) = \exp\left(-\frac{(u_1^2 + u_2^2 + 2\rho u_1 u_2)}{2}\right)$$

3)a) Mq $Y = (X_1 - X_2, X_1 + X_2)$ est un vecteur gaussien

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\langle \alpha, Y \rangle = \alpha_1 (X_1 - X_2) + \alpha_2 (X_1 + X_2)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2) X_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) X_2$$

Comme X est une loi gaussienne $X \sim \mathcal{N}(m_X, \Gamma_X)$

Donc, $\langle \alpha, Y \rangle$ est une gaussienne

Il vient que Y est gaussien

$$Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} X$$

toute transformation linéaire d'un vecteur gaussien est gaussien

Y est donc un vecteur gaussien de $m_Y = A m_X$ et $\Gamma_Y = A \Gamma_X {}^t A$

b) $\Gamma_Y = A \Gamma_X {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\rho & 1+\rho \\ \rho-1 & 1+\rho \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(1+\rho) & 0 \\ 0 & 2(1+\rho) \end{pmatrix}$$

c) Grâce à la matrice de covariance de Y, on sait que $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$ sont indépendants

d) $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $m_Y = A m_X = (0,0)$

$$\phi_Y(u) = \exp\Big(\underbrace{-(1-\rho)u^2 - (1+\rho)u^2}_{-\left(\frac{{}^tu\,\Gamma_Y\,u}{2}\right)}\Big)$$

$$\phi_{X_1 - X_2}(u_1) = \phi_Y(u_1, 0)$$

$$\phi_{X_1 + X_2}(u_2) = \phi_Y(0, u_2)$$

$$\phi_Y(u) = \underbrace{\exp\left(-(1-\rho)u_1^2\right)}_{\phi_{X_1 - X_2}(u_1)} \underbrace{\exp\left(-(1+\rho)u_2^2\right)}_{\phi_{X_1 + X_2}(u_2)}$$

On retrouve l'indépendance de $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$

4) 4. Soit Y_1, Y_2 deux variables aléatoires gaussiennes dont la matrice de covariance est Σ. Les variables aléatoires $Y_1 - Y_2$ et $Y_1 + Y_2$ sont-elles indépendantes ?

$Y = (Y_1, Y_2)$ et $(U, V) = (Y_1 - Y_2, Y_1 + Y_2)$

Exercice 2

Exercice 2

Soit $X := (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance Σ.

1. (a) Montrer que pour toute matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, MX est aussi un vecteur gaussien.
   (b) Quelle est sa matrice de covariance ?
2. On suppose que X est non-dégénéré. Montrer qu'il existe $Y := (Y_1, \ldots, Y_n)$, un vecteur gaussien de matrice de covariance I_n, et une matrice A telle que $X = AY$ (Rappel : une matrice symétrique semi-définie positive est le carrée d'une autre matrice symétrique semi-définie positive).

1) a. $X \sim N(m_X, \Gamma_X)$ où $m_X = 0$

$M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $Y = MX$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $\langle \alpha, Y \rangle = \langle \alpha, MX \rangle$
$= \langle {}^tM\alpha, X \rangle$ est gaussienne car X gaussienne

Y est un vecteur gaussien de moyenne $m_Y = m_{MX} = M m_X$

b) et de matrice de covariance $\Gamma_Y = \Gamma_{MX} = M \Gamma_X {}^tM$

2) X est non dégénéré donc Γ_X est inversible (ssi Γ_X est définie positive)

$\Rightarrow \exists A$ symétrique définie positive tq $\Gamma_X = {}^tA A = A^2$

On cherche $Y = (Y_1, \ldots Y_n)$ vecteur gaussien et A tq

$$\begin{cases} \Gamma_Y = I_n \\ X = AY \end{cases}$$

On sait que $\exists A$ symétrique définie positive tq $\Gamma_X = A^2$. En particulier, A est inversible

On pose $Y = A^{-1}X$

Y est un vecteur gaussien de covariance :

$$\Gamma_Y = \Gamma_{A^{-1}X} = (A^{-1})\Gamma_X\,{}^t(A^{-1})$$
$$= (A^{-1})\,A^2\,{}^t(A^{-1})$$
$$= A\,{}^t(A^{-1}) = A A^{-1} = I_n \quad \text{car } {}^t(A^{-1}) = A^{-1}$$

Exercice 3 (Un exercice de l'examen de 2016)
On considère la matrice

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det \Sigma = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(9+1) = 20$$

$+ \quad - \quad +$

1. Montrer que cette matrice est une matrice de covariance. positive car $\det \Sigma > 0$
2. On considère X un vecteur gaussien de matrice de covariance Σ. Est-ce que X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$? Si oui, donner l'expression de cette densité en fonction de la moyenne $m = (m_1, m_2, m_3)$ de X.
3. Déterminer une matrice 3×3 inversible A telle que les composantes du vecteur AX soient indépendantes.
4. Dans le cas où le vecteur $X = (X_1, X_2, X_3)$ est centré, déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 - X_3$

1) Σ est une matrice de covariance si ses valeurs propres sont positives

$$\det(\Sigma - I\lambda) = \left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = 2-\lambda\left((3-\lambda)^2 - 1\right)$$
$$= 2-\lambda\left((a)^2 - b^2\right)$$
$$= (2-\lambda)(3-\lambda+1)(3-\lambda-1)$$
$$= (2-\lambda)^2(4-\lambda)^2$$

$VP = \{2, 4\}$ donc Σ est positive est donc Σ est une matrice de covariance

2) Si $\operatorname{Det}\Sigma$ est inversible alors X admet densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Det}\Sigma = 2(9-1) = 16 \neq 0$$

$m_X = (m_1, m_2, m_3) \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \qquad n = 3$

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\mathrm{Det}(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{{}^t(x-m_X)\Sigma(x-m_X)}{2}\right)$$

la densité de X

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{16}} \exp\left(-\frac{{}^t(x-m_X)\Sigma(x-m_X)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,4} \exp\left(-\frac{{}^t(x-m_X)\Sigma(x-m_X)}{2}\right)$$

3) AX est gaussien donc ses coordonnées sont indépendantes ssi elles sont décorélées, i.e ssi $\mathrm{cov}(AX)$ est diagonale $\begin{pmatrix} \times & o & o \\ o & \times & o \\ o & o & \times \end{pmatrix}$ $\mathrm{Cov}(AX) = A X\, {}^tA$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4) Loi de $X_1 + 2X_2 - X_3 = Z \qquad A = (1, 2, -1)$

$\phi_Z(t) = \phi_{AX}(t) = \phi_X({}^tAt)$

$$\phi_X({}^tAt) = \underbrace{e^{i\langle t, M\rangle}}_{=1 \text{ car } X \text{ centré}} \; e^{-\frac{{}^tAt\,\Sigma\, At}{2}}$$

$$\phi_X({}^tAt) = \exp\left(-\frac{{}^tAt\,\Sigma\, At}{2}\right) = \exp\left(-\frac{{}^tA\Sigma A}{2}t^2\right)$$

$${}^tA\Sigma A = (1,2,-1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (1,5,-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 13$$

$$\phi_X({}^tAt) = \phi_{X_1+2X_2-X_3}(t) = \exp\left(-\frac{13t^2}{2}\right) \sim \mathcal{N}(0,13)$$

Exercice 4

On rappelle le théorème de Cochran :

Theorem 1

Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbf{R}^n$, d'espérance nulle et de matrice de covariance $\sigma^2 I_n$. On définit

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum X_i \text{ et } \overline{V}_n := \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2\right).$$

Autrement dit, $\overline{X}_n$ est la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, et $\overline{V}_n$ sa variance empirique. Alors on a :

1. $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$.
2. $(n/\sigma^2)\overline{V}_n \sim \chi^2_{n-1}$.
3. $\overline{X}_n$ et $\overline{V}_n$ sont indépendantes.
4. $\dfrac{\overline{X}_n}{\sqrt{\overline{V}_n/(n-1)}} \sim T_{n-1}$.

Le but de cet exercice est de montrer ce théorème.

1. Montrer qu'il suffit de traiter le cas $\sigma^2 = 1$. On supposera que $\sigma^2 = 1$ dans la suite.
2. Montrer la première proposition du théorème.
3. Montrer que $\overline{V}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2$.
4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $AX \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ si et seulement si $A \in \mathcal{O}_n(R)$.
5. On admet que pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^n$ tel que $||u_i||_2 = 1$ il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ dont la dernière ligne est u ($M_{n,i} = u_i$). Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que si on pose $Y = MX$ alors $Y_n = \sqrt{n}\,\overline{X}_n$. Quelle est la loi de Y ?
6. Montrer que
$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2.$$
7. Démontrer le théorème de Cochran.