ISFA Lyon
L3 Actuariat
Probabilités Avancées

TD 2 - Moments

2017 - 18
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
poudevigne@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des réels strictement positifs. Soit $(Y_1, \dots, Y_n)$ des variables indépendantes suivant des lois gamma de paramètres respectifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

1. Déterminer la loi jointe du vecteur $\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}, Y_1+Y_2\right)$.
2. $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$ et Y_1+Y_2 sont-elles indépendantes ?
3. En déduire les moments joints $\mathbb{E}\left(\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_1}\left(\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_2}\right)$ de $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$ et $\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}$
4. Montrer que le vecteur $\left(\frac{Y_1}{Y_1+\cdots+Y_n}, \dots, \frac{Y_{n-1}}{Y_1+\cdots+Y_n}\right)$ est indépendant de $Y_1+\cdots+Y_n$
5. En déduire les moments joints $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i}{Y_1+\cdots+Y_n}\right)^{\beta_i}\right)$.
6. Calculer la covariance de $\frac{Y_1}{Y_1+\cdots+Y_n}$ et $\frac{Y_2}{Y_1+\cdots+Y_n}$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire d'espérance finie.

1. (Inégalité de Jensen) Montrer que pour toute fonction convexe ϕ, $\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \phi(\mathbb{E}(X))$.
2. Soit p, q deux réels tels que $1 \leq p \leq q$. Montrer que $||X||_p \leq ||X||_q$.
3. Soit p un réel tel que $p \geq 1$. Montrer que $||X||_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} ||X||_\infty$.

Exercice 3

Soit N une variable aléatoire à valeur dans $[\![0;n]\!]$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables iid d'espérance et variance finies.

1. Quelle est l'espérance de $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$?
2. Quelle est la variance de $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$?
3. Montrer que N et $\sum_{i=1}^{N} X_i$ sont indépendants si et seulement si N est déterministe.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire d'espérance et de variance finie.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}((X-a)^2)$.
2. Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$ on note f_A la fonction définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A \text{ si } x \leq -A \\ x \text{ si } x \in [-A; A] \\ A \text{ si } x \geq A. \end{cases}$$

Montrer que si $A \geq |\mathbb{E}(X)|$ alors $\mathrm{Var}(f_A(X)) \leq \mathrm{Var}(X)$

Exercice 1

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des réels strictement positifs. Soit $(Y_1, \dots, Y_n)$ des variables indépendantes suivant des lois gamma de paramètres respectifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

1. Déterminer la loi jointe du vecteur $\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}, Y_1+Y_2\right)$.
2. $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$ et Y_1+Y_2 sont-elles indépendantes ?
3. En déduire les moments joints $\mathbb{E}\left(\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_1}\left(\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_2}\right)$ de $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$ et $\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}$.
4. Montrer que le vecteur $\left(\frac{Y_1}{Y_1+\dots+Y_n}, \dots, \frac{Y_{n-1}}{Y_1+\dots+Y_n}\right)$ est indépendant de $Y_1+\dots+Y_n$.
5. En déduire les moments joints $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i}{Y_1+\dots+Y_n}\right)^{\beta_i}\right)$.
6. Calculer la covariance de $\frac{Y_1}{Y_1+\dots+Y_n}$ et $\frac{Y_2}{Y_1+\dots+Y_n}$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exo 1 :

$Y_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)$ indépendantes

$$f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y_i)\, y_i^{\alpha_i - 1} e^{-y_i}$$

$$(U,V) = \left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}, Y_1+Y_2\right)$$

Trouver la densité de (U,V) en fonction de la densité de (Y_1,Y_2). Comme Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, borélienne, bornée, positive

$$E(g(U,V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}, y_1+y_2\right) f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)\, d(y_1,y_2)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \iint_{(\mathbb{R}_+^*)^2} g\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}, y_1+y_2\right) y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} e^{-(y_1+y_2)}\, d(y_1,y_2)$$

$\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$ car $0 < y_1 < y_1+y_2$

$0 < \frac{y_1}{y_1+y_2} < 1$

φ bijective : $\begin{cases} u = \frac{y_1}{y_1+y_2} \\ v = y_1+y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = uv \\ y_2 = v(1-u) \end{matrix}$

$\varphi^{-1} :]0,1[\times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2$

$(u,v) \longrightarrow (uv, v(1-u))$

$$\mathrm{Jac}(f^{-1})(u,v) = \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = \underline{\underline{v}}$$

$$E\left(g(U,V)\right) = \iint_{]0,1[\times\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} g(u,v)(uv)^{\alpha_1-1}(v(1-u))^{\alpha_2-1} e^{-v} \underline{\underline{|v|}}\, d(u,v)$$

(U,V) admet donc une densité définie par $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{U,V}(u,v) = \left(\mathbb{1}_{]0,1[}(u)\, u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1}\right)\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(v)\, v^{(\alpha_1+\alpha_2)-1} e^{-v}\right)$$

$$f_{U,V}(u,v) = \left(\mathbb{1}_{]0,1[}(u)\, u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\right) \times$$

$$\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(v)\, v^{(\alpha_1+\alpha_2)-1} e^{-v} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\right)$$

U et V sont independantes et $U \sim B(\alpha_1,\alpha_2)$

$V \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, 1)$

3) 3. En déduire les moments joints $\mathbb{E}\left(\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_1}\left(\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_2}\right)$ de $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$ et $\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}$

$$A(\beta_1,\beta_2) = E\left[\left(\frac{Y_1}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_1}\left(\frac{Y_2}{Y_1+Y_2}\right)^{\beta_2}\right]$$

Rem: $\frac{Y_2}{Y_1+Y_2} = 1 - \frac{Y_1}{Y_1+Y_2}$

$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$

$$A(\beta_1,\beta_2) = E\left[U^{\beta_1}(1-U)^{\beta_2}\right]$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} u^{\beta_1} (1-u)^{\beta_2} f_{(U,V)}(u,v) \, d(u,v)$$

$$= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f_V(v) \, dv \right)}_{=1} \left(\int_{\mathbb{R}} u^{\beta_1} (1-u)^{\beta_2} f_U(u) \, du \right)$$

$$A(\beta_1, \beta_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{]0,1[}(u) \, u^{(\beta_1+\alpha_1)-1} (1-u)^{(\beta_2+\alpha_2)-1} \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}}_{=\frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}} \, du$$

$$= \frac{B(\beta_1+\alpha_1, \beta_2+\alpha_2)}{B(\alpha_1,\alpha_2)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}(u) \, \frac{u^{(\beta_1+\alpha_1)-1} (1-u)^{(\beta_2+\alpha_2)-1}}{B(\beta_1+\alpha_1, \beta_2+\alpha_2)} \, du}_{=1}$$