ISFA Lyon
L3 Actuariat
Probabilités Avncées

2018 - 19
poudevigne@math.univ-lyon1.fr
lerouvillois@math.univ-lyon1.fr

TD 1 - VECTEURS ALÉATOIRES

Exercice 1
On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} kx^2y \text{ si } (x,y) \in [-1,1] \times [0,1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k.
2. Calculer les densités marginales de X et de Y.
3. Déterminer la fonction de répartition jointe du vecteur (X, Y).
4. Déterminer les fonctions de répartitions marginales de X et de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $\mathbb{P}\left((x,y) \in [0;1/2]^2\right)$.
7. Combien vaut $\mathbb{P}(X < Y)$?

Exercice 2
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} ae^{-x-y} \text{ si } 0 \leq x \leq y, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'un couple de variables aléatoires (X, Y).
2. Déterminer la fonction de répartition jointe du vecteur (X, Y).
3. Déterminer les densités et fonctions de répartition marginales.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

Exercice 3
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x,y) = \lambda e^{-\left(\frac{y^2}{2} - xy + x^2\right)}.$$

$Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$

1. Déterminer λ, la loi de X et la loi de Y.
2. Donner la fonction caractéristique de (X, Y).
3. Calculer $Cov(X, Y)$ et étudier l'indépendance de X et de Y.

Exercice 4
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).
2. On considère le vecteur aléatoire $(U, V) = (X + 2Y, 3X - Y)$. Déterminer la matrice de covariance de (U, V).

Exercice 5
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leq y\}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_D(x,y)$$

1. Vérifier que f est la densité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires.
2. Quelles sont les densités marginales de X et de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Les variables X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
5. Les variables $X + Y$ et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
6. Les variables Y et $\frac{X}{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On pose $U = X + Y$ et $V = \dfrac{X}{X+Y}$.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. U et V sont-elles indépendantes ? Donner la matrice de covariance du couple (U, V).

Exercice 7

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires. On suppose que les trois couples (X, Y), (Y, Z) et (X, Z) ont le même coefficient de corrélation ρ. Montrer que l'on a

$$\rho \geq -\frac{1}{2}.$$

Indication : On pourra, dans un premier temps, supposer que les v.a. X, Y et Z ont même variance.

Exercice 8

Soit X et Y deux variables aléatoires.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left[(Y-a)^2\right]$ est minimum.
2. Montrer que
$$\phi(a, b) = \mathbb{E}\left[(Y - (aX + b))^2\right]$$
admet un unique minimum en $a = \dfrac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}$, $b = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\dfrac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}$
3. Soit maintenant $Y, X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de $L^2(\mathbb{P})$. Déterminer $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent
$$\mathbb{E}\left[(Y - (a_1X_1 + ... + a_nX_n + b))^2\right]$$

Exercice 9

Soit $X_1, ...X_n, Y, Z$ des variables de L^2.
On appelle coefficient de corrélation partiel de Y et Z contre $X_1, ..., X_n$ le coefficient de corrélation linéaire des variables Y et Z privées de leurs régressions linéaires (notées $\tilde{Y}$ et $\tilde{Z}$) par rapport à $(X_1, ..., X_n)$.
Montrer que ce coefficient est égal à :

$$\alpha\frac{\mathbb{V}\left[Z - \tilde{Z}\right]^{\frac{1}{2}}}{\mathbb{V}\left[Y - \tilde{Y}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

où α désigne le coefficient de corrélation linéaire de Y par rapport aux variables $X_1, ..., X_n, Z$.

Exercice 1

(X,Y) variable aléatoire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$f : (x,y) \rightarrow \begin{cases} kx^2y \text{ si } (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer K

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 Kx^2 y \, dy \right) dx = 1$$

$$K \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_0^1 dx = K \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 \, dx = 1$$

$$\frac{K}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow \frac{K}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{K}{2} \times \frac{2}{3} = 1$$

$$K = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

avec Fubini Tonelli :

$$3 \left(\int_{-1}^{1} x^2 \, dx \right) \left(\int_0^1 y \, dy \right) = 1$$

2) Calculez les lois marginales de X et de Y

Rappel : $f_X = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)} \, dy$

Si $x \in [-1,1]$

$$f_X = \int_0^1 3x^2 y \, dy = 3x^2 \int_0^1 y \, dy = \frac{3}{2} x^2$$

Si $x \notin [-1,1]$, $f_X(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{3}{2} x^2 \mathbb{1}_{[-1,1]}$

Pour Y : Si $y \notin [0,1]$, $f_Y(y) = 0$

Sinon, $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

$= 3y \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 3y\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 3y\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$
$= 3y\left(\frac{1}{6}\right) = 2y$

Donc, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f_Y(y) = 2y\,\mathbb{1}_{[0,1]}y$

3. Déterminer la fonction de répartition jointe de (X,Y)

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$F_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \mathbb{P}(X \leq t_1, Y \leq t_2)$

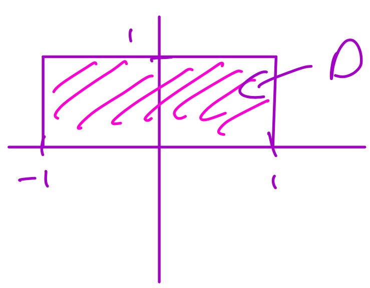
Comme $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$, $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

d'où X et Y sont indépendantes.

En particulier, $F_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \mathbb{P}(X \leq t_1)\,\mathbb{P}(Y \leq t_2)$

Méthode direct pour calculer la fonction de répartition de (X,Y).

$F_{(X,Y)}(t_1,t_2) = 0$ si $t_1 < -1$ ou $t_2 < 0$



Si $t_1, t_2 \in D$ on a

$$F_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \int_{-1}^{t_1}\left(\int_0^{t_2} 3x^2 y \, dy\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{t_1} 3x^2 \, dx \int_0^{t_2} y \, dy$$

$$= \left[x^3\right]_{-1}^{t_1} \left[y^2/2\right]_0^{t_2}$$

$$= (t_1^3+1)\frac{t^2}{2}$$

Si $t_1 > 1$ et $t_2 > 1$, alors $F_{X,Y}(t_1,t_2) = 1$

Si $t_1 > 1$ et $t_2 \in [0,1]$, $F_{(X,Y)}(t_1,t_2) = t_2^2$

Si $t_1 \in [-1,1]$ et $t_2 > 1$, $F_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \frac{(t_1^3+1)}{2}$

4. Déterminer les fonctions de répartition marginales.

$F_{(X,Y)}$ connu donc on peut calculer F_X et F_Y

par $F_X(t) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(t,y)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{t^3+1}{2} & \text{si } t \in [-1,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

6) Calculer $\mathbb{P}((x,y) \in [0;\frac{1}{2}]^2)$

$$= \mathbb{P}(0 \leq X \leq \tfrac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \tfrac{1}{2})$$

$$= \mathbb{P}(0 \leq X \leq \tfrac{1}{2}) \mathbb{P}(0 \leq Y \leq \tfrac{1}{2})$$

$$= \int_0^{1/2} f_X(x)\, dx \int_0^{1/2} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{3}{2} x^2\, dx \int_0^{1/2} 2y\, dy$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

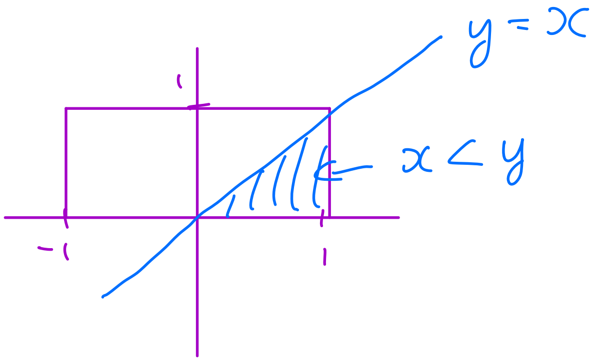
7) Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$

Par théorème de transfert :

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = E(\mathbb{1}_{X \leq Y})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{X \leq Y}(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, d(x,y)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{X \leq Y}(x,y)\, \mathbb{1}_D(x,y)\, 3x^2 y\, d(x,y)$$



$$= \int_0^1 \int_{-1}^{y} 3x^2 y \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 y \left[x^3 \right]_{x=-1}^{x=y} dy$$

$$= \int_0^1 y(y^3+1) \, dy = \left[\frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{7}{10}$$

Exercice 2

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f : (x,y) \to \begin{cases} a e^{-x-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, d(x,y) = 1$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_D(x,y) \, a e^{-x-y} \, d(x,y) \quad \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq y\}$$

$$= a \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} e^{-x-y} \, dy \right) dx$$

$$= a \int_0^{\infty} e^{-x} \left[-e^{-y} \right]_x^{\infty} dx = a \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-x} \, dx$$

$$= a \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{\infty} = \frac{a}{2} \quad \text{donc } a = 2$$

2) Déterminer la fonction de répartition jointe du vecteur (X,Y)

On a $F_{X,Y}(t_1,t_2) = 0$ si $t_1 < 0$ et $t_2 < 0$

Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors

$$F_{X,Y}(t_1,t_2) = 2\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x\leq t_1}(x)\ \mathbb{1}_{x\leq t_2}(y)\ \underbrace{\mathbb{1}_{x\leq y}(x,y)\, e^{-x-y}}_{g(x,y)}\, d(x,y)$$

$$F_{X,Y}(t_1,t_2) = 2\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \mathbb{1}_{x\leq y}(x,y)\, e^{-x-y}\, dy\, dx$$

$$= 2\int_0^{t_1}\int_x^{t_2} e^{-x-y}\, dy\, dx = 2\int_0^{t_1} e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_x^{t_2} dx$$

$$= 2\int_0^{t_1} e^{-x}\left(e^{-x} - e^{-t_2}\right) dx$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x-t_2}\right]_0^{t_1} = 2\left(-e^{-t_2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t_1} + e^{-t_1-t_2}\right)$$

3. Déterminer les densités

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x-y}$$

$$f_X(x) = \int_0^x 2e^{-x-y}\, dy = 2\int_0^x e^{-x-y}\, dy = 2\left[\frac{1}{-x-y+1}e^{-x-y+1}\right]_0^x$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{-x+1}e^{-x+1}\right) - \left(\frac{1}{-2x+1}e^{-2x+1}\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{-x+1}e^{-x+1} + \frac{1}{2x-1}e^{-2x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{-x+1}e^{-x+1} + \frac{2}{2x-1}e^{-2x+1}$$

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} 2\left(e^{-x} e^{-y}\right) dy = 2e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy$$
$$= 2e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = 2e^{-x}\left[0+1\right] = 2e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{y} 2e^{-x} e^{-y}\, dx = 2e^{-y} \int_0^{y} e^{-x}\, dx = 2e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^{y}$$
$$= 2e^{-y}\left[-e^{-y}+1\right]$$
$$= -2e^{-2y} + 2e^{-y}$$

4. Non pas indep car $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$

5. $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la densité conditionelle de X sachant $Y = y$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Exercice 3
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x,y) = \lambda e^{-\left(\frac{y^2}{2} - xy + x^2\right)}.$$

1. Déterminer λ, la loi de X et la loi de Y.
2. Donner la fonction caractéristique de (X,Y).
3. Calculer $Cov(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et de Y.

$cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$

Exercice 3

(X,Y) V.A de densité

$$f(x,y) = \lambda e^{-\left(\frac{y^2}{2} - xy + x^2\right)}$$

1) Déterminer λ, la loi de X et la loi de Y

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(x,y) = 1$$

On note : $\frac{y^2}{2} - xy + x^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}$

On pose le changement de variable $(u,v) = \left(x - y/2, \frac{y}{2}\right)$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (u,v) = \left(x - \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)$$
$$(u,v) \longrightarrow (u+v, 2v)$$

$$\det Jac(f^{-1})(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(x,y) = \lambda \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)} d(x,y)$$

$$= \lambda \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2)}\, 2\, du\, dv = 2\lambda \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2)} du\, dv$$

$$= 2\lambda\pi$$

Rappel : $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2)} du\,dv = \pi$; $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$2\lambda\pi = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{2\pi}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{y^2}{2} - xy + x^2\right)} dy$$

or $\frac{y^2}{2} - xy + x^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}} dy$$

2) Trouver la f.c de (X,Y)

Rappel : $\phi_{(X,Y)}(u,v) = E\left(e^{i(uX+vY)}\right)$

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = E\left(e^{i(uX+vY)}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(ux+vy)} e^{-\left(\frac{y^2}{2} - xy + x^2\right)} dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{iux + ivy - \frac{y^2}{2} + xy + x^2} dx\,dy$$

- Isoler les variables pour appliquer Fubini
- Reconnaître des fonctions caractéristiques gaussiennes

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\phi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

3) Donner $Cov(X,Y)$

Méthode 1 : calcul direct à partir de la densité de (X,Y)
et $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Méthode 2 : Utiliser les dérivées de $\phi(X,Y)$, ϕ_X et ϕ_Y.

$$cov(X,Y) = -\partial_{xy}\phi_{(X,Y)}(0,0) + \partial_x \phi_X(0)\,\partial_y \phi_Y(0)$$

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$$

Ex: $f(x,y) = xe^{-y}$

$$\partial_x f(x,y) = e^{-y}$$

$$\partial_{yx} f(x,y) = \partial_y \partial_x f(x,y) = -e^{-y}$$

$$\partial_{yx} f(0,0) = -1$$

et $\partial_{xy}\phi_{(X,Y)}(0,0) = i^2 E(XY)$

Exercice 4
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).
2. On considère le vecteur aléatoire $(U, V) = (X + 2Y, 3X - Y)$. Déterminer la matrice de covariance de (U, V).

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

	X	Y
X	$Var(X)$	$cov(X,Y)$
Y	$cov(Y,X)$	$var(Y)$

Exercice 4

X, Y indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$f_X = f_Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$E(X) = E(Y) = 0$

$Var(X) = Var(Y) = 1$

$Cov(X,Y) = 0$ indépendance de X et Y

Donc on a $V(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $(U,V) = (X+2Y, 3X-Y)$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+2Y \\ 3X-Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La matrice de covariance de (U,V) est

$$V(U,V) = A\, V(X,Y)\, A^t$$
$$= AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Ou alors : $cov(U,V) = cov(X+2Y, 3X-Y)$

$= cov(X, 3X-Y) + 2cov(Y, 3X-Y)$

$= 3cov(X,X) - cov(X,Y) + 2\times 3 cov(Y,X) - 2cov(Y,Y)$

$= 3\,var(X) + (6-1)cov(X,Y) - 2var(Y)$

$= 3 - 2 = 1$

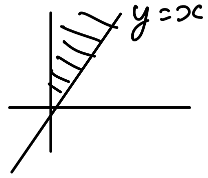
Exercice 5
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leq y\}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_D(x,y)$$

1. Vérifier que f est la densité d'un couple (X,Y) de variables aléatoires.
2. Quelles sont les densités marginales de X et de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Les variables X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
5. Les variables $X + Y$ et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?
6. Les variables Y et $\frac{X}{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 5

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y\}$



$f(x,y) = \mathbb{1}_D(x,y)\, e^{-y}$

Est-ce que f définit une densité de proba ?

Rq: $f(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d(x,y) = 1$$

par Fubini-Tonelli

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{y} e^{-y}\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} y e^{-y}\, dy$$

$$\overset{I.P.P}{=} \left[y(-e^{-y})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-y})\, dy$$

$$= \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 1$$

donc f est bien une densité de proba d'un couple de v.a noté (X,Y)

2) Quelles sont les densités marginales ?

Comme (X,Y) est à densité, d'où X et Y le sont aussi et

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\, \mathbb{1}_{\{y \in \mathbb{R},\, y \geq x\}}(y)\, e^{-y}\, dy$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \int_x^{+\infty} e^{-y}\, dy$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\, e^{-x} \quad \rightsquigarrow \quad X \sim \mathcal{E}(1)$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx$$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) \int_0^y e^{-y}\, dx = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\, y e^{-y}$$

Notons que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f_Y(y) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)$

où $a = 2$ et $\lambda = 1$

et $\Gamma(2) = 1! = 1$

Rappel : $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \forall \alpha > 0$

$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$Y \sim \Gamma(2,1)$

3) X et Y sont elles indépendantes ?

$f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ sur un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$

4) Les variables X et $Y-X$ sont elles indep ?

On cherche à déterminer la loi du couple $(U,V) = (X, Y-X)$

$$E(g(U,V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\, h_{U,V}(u,v)\, d(u,v)$$

$$\underset{g(X,Y-X)}{\parallel} \qquad = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y-x)\, f(x,y)\, d(x,y)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (x, y-x)$$

f est mesurable positive et $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(u,v) \longrightarrow (u, u+v)$

$u = x \qquad \Rightarrow \quad x = u$
$v = y - x \qquad\quad y = u+v$

$$\mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et donc

$$E(g(u,v)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\, f(u,u+v)\, d(u,v)$$

$(u, u+v) \in D \iff \begin{cases} 0 < u \leq u+v \\ 0 < u \\ 0 \leq v \end{cases}$

$$E(g(u,v)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\, 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*}(u,v)\, e^{-(u+v)}\, d(u,v)$$

donc (U,V) est à densité $f_{(U,V)}(u,v) = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+}(u,v)\, e^{-(u+v)}$

Remarque : $f_{(U,V)}(u,v) = \left(1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}\, e^{-u}\right)\left(1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(v)\, e^{-v}\right)$

donc U et V sont indépendants et de même loi $\mathcal{E}(1)$

5) Même chose

6) Même chose

Exercice 6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On pose $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. U et V sont-elles indépendantes ? Donner la matrice de covariance du couple (U, V).

On a X et Y $\perp$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$f_{X,Y}(x,y) = -\lambda e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}$

$U = X + Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$

$E(g(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y, \frac{x}{x+y}) e^{x+y} \, d(x,y)$ (théorème de transfert)

Soit f mesurable positive

$x = uv \qquad y = u(1-v)$

$f : u, v \longrightarrow (uv, u(1-v))$

$E(f(u,v)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v) \lambda^2 e^{-\lambda u} |\mathrm{Jac}(f)| \, d(u,v)$

$$\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = (vu) - (-u - uv) = -vu - u + uv = -u$$

$E(f(u,v)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v) \lambda^2 e^{-\lambda u} u \, d(u,v)$

donc la densité de (u,v)

est $f_{u,v}(u,v) = u\lambda^2 e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \mathbb{1}_{[0,1[}(v)$

U et V independantes car

$f_{u,v}(u,v) = f_u(u) \cdot f_v(v)$

$f_u(u) = u\lambda^2 e^{\lambda u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$

$f_v(v) = \mathbb{1}_{[0,1[}(v)$

Exercice 7

Exercice 7
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires. On suppose que les trois couples (X, Y), (Y, Z) et (X, Z) ont le même coefficient de corrélation ρ. Montrer que l'on a

$$\rho \geq -\frac{1}{2}.$$

Indication : On pourra, dans un premier temps, supposer que les v.a. X, Y et Z ont même variance.

Exercice 8

Exercice 8
Soit X et Y deux variables aléatoires.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left[(Y-a)^2\right]$ est minimum.
2. Montrer que
$$\phi(a,b) = \mathbb{E}\left[(Y-(aX+b))^2\right]$$
admet un unique minimum en $a = \frac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}$, $b = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\frac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}$
3. Soit maintenant $Y, X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de $L^2(\mathbb{P})$. Déterminer $a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent
$$\mathbb{E}\left[(Y-(a_1X_1+...+a_nX_n+b))^2\right]$$

Exos de cours chapitre 1