Jalabert
Théo

Devoir Maison : Proba 2

Exercice 1. On note $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.

1. Quelle est la loi de $V = -\ln(U)$. En déduire celle de $W = -\ln(1-U)$.
2. Montrer que $R = \sqrt{-\ln(U)}$ suit une loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ dont on précisera le paramètre α. On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ si elle admet une densité de la forme : $f(x) = \left(\frac{x}{\alpha^2}\right) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.
3. Soient $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$ où $R \sim \mathcal{R}(\alpha)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi[)$ sont indépendantes. Déterminer la loi conjointe de (X,Y). En déduire une méthode pour générer deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Exercice 1 : $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$

1) Soit $V = -\ln(U)$ et $W = -\ln(1-U)$

Soit φ une applicat° mesurable définie positive,

$$\mathbb{E}[\varphi(-\ln(U))] = \int \varphi(-\ln(u))\, \mathbb{1}_{]0,1[}(u)\, du$$

$$= \int_0^1 \varphi(-\ln(u))\, du = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-x} dx$$

changement de variable C^1 bijectif
$x = -\ln(u)$, $dx = -\frac{1}{u} du$

D'où $\boxed{f_V(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)}$.

D'autre part, $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ Donc $1-U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$

Donc quitte à rebaptiser U en $1-U$,

$\Rightarrow \boxed{f_W(\omega) = e^{-\omega} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\omega)}$

2) Soit $R = \sqrt{-\ln(U)} = \sqrt{V}$ et φ applicat° mesurable positive.

$$\mathbb{E}(\varphi(\sqrt{V})) = \int_0^\infty \varphi(\sqrt{v}) e^{-v} dv = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-x^2} 2x\, dx$$

Changem^t de var C^1 bijectif
$x = \sqrt{v}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{v}} dv$

$\Rightarrow f_R(x) = 2x e^{-x^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow R \sim \mathcal{R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

3) Soit $R \sim \mathcal{R}(\alpha)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}(]0,2\pi[)$

$X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$

Avec $R \perp\!\!\!\perp \Theta$.

$$\Rightarrow f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r) \times f_\Theta(\theta) = \frac{r}{\alpha^2} e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r) \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{]0,2\pi[}(\theta)$$

$$R = \underbrace{\sqrt{X^2+Y^2}}_{h_1(x,y)} \quad \text{et} \quad \Theta = \underbrace{\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)}_{h_2(x,y)}$$

$$\mathrm{Jac}(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathrm{Jac}(X,Y)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(x,y)$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \underbrace{\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)}_{f_X(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)}_{f_Y(y)}$$

D'où $X \sim \mathcal{N}(0,\alpha)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,\alpha)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$

Donc on peut générer $\phi \sim \mathcal{U}(]0,2\pi[)$ en prenant $\phi = 2\pi U_1$ avec $U_1 \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.
Puis on génère $U_2 \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ $\perp\!\!\!\perp$ de U_1.
On calcule $V = -\ln(U_2)$ puis $R = \sqrt{-\ln(U_2)}$.

On obtient $R \sim \mathcal{R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $R \perp\!\!\!\perp \Theta$ les calculs précédents montrent que $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$ sont gaussiennes centrées de variance α et indépendantes

Exercice 2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$ et soit $\lambda > 0$. On note $E_n = \frac{-\ln(U_n)}{\lambda}$ pour tout $n \geq 1$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} E_k$.

1. Identifier la loi des E_k puis celle de S_n.
2. On pose $N = \min\{n \geq 0, U_1 U_2 \cdots U_{n+1} \leq e^{-\lambda}\}$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

   Hint : on pourra commencer par montrer que $\{N = n\}$ est le même évènement que $\{S_1 \leq 1, S_2 \leq 1, \cdots, S_n \leq 1, S_{n+1} > 1\}$ puis utiliser le théorème de transfert.

Exercice 2 : $E_n = \frac{-\ln(U_n)}{\lambda}$ $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} E_k \quad U_n \sim \mathcal{U}(]0,1[)$

1) Par propriété du cours, $\forall k \geq 1, E_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Donc par somme de loi exponentielle indep, $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

2) $N = \min\{n \geq 0, \prod_{i=1}^{n+1} U_i \leq e^{-\lambda}\}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\ln(U_k)}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right) \quad (*)$$

$$\underbrace{\min\{n \geq 0, \prod_{i=1}^{n} U_i \leq e^{-\lambda}\}}_{\{N=n\}} = \min\{n \geq 0, -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right) \leq 1\}$$

$$\underset{\text{par } (*)}{=} \min\{n \geq 0, S_n \leq 1\}$$

$$= \{n \geq 0 \mid S_1 \leq 1, S_2 \leq 1, \ldots, S_n \leq 1, S_{n+1} > 1\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(N \geq n) - \mathbb{P}(N \geq n+1)$$

$$= \mathbb{P}(S_n \leq 1) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq 1)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1}\, dx}_{= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{\Gamma(n+1)} + \int_0^1 \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} e^{-\lambda x} x^n dx \; (*)} - \int_0^1 \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} e^{-\lambda x} x^n\, dx$$

$*$ IPP : $u' = x^{n-1}$, $u = \frac{x^n}{n}$

$v = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} \Rightarrow v' = -\frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x}$

$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

D'où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

Exercice 3 : Soit $\varepsilon > 0$

Montrons que $\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}$

i.e Montrons que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Leftarrow \underbrace{\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max X_k < \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right)}_{*_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ et } \underbrace{\mathbb{P}\left[\frac{1}{\ln(n)} \max X_k > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right]}_{*_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$*_1 = \mathbb{P}\left(\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{1}{\ln(n)} X_k < \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) = \left(\mathbb{P}\left(X_1 < \left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right)\ln(n)\right)\right)^n$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right)\ln(n)}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On a supposé que $\varepsilon < \frac{1}{\lambda}$ (sinon proba nulle donc convergence OK)

$$*_2 = \mathbb{P}\left(\exists k \in [\![1,n]\!],\ \frac{1}{\ln(n)} X_k > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \underset{\text{par sous additivité}}{\leq} n\,\mathbb{P}\left[X_1 > \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)\ln(n)\right]$$

$$= n e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)\ln(n)} = n^{-\lambda\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On a bien montré que $\mathbb{P}\left(\frac{1}{\ln(n)} \max X_k < \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\mathbb{P}\left[\frac{1}{\ln(n)} \max X_k > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

D'où on a bien $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Donc $\boxed{\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}}$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\alpha > 0$. Calculer la limite suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

en utilisant la loi forte des grands nombres.

Exercice 4 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \overset{\text{théorème de transfert}}{=} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{P_1 + \dots + P_n}{n}\right)\right]$

où $P_1, \dots, P_n$ sont de va de Poisson indep de paramètre α

D'après la loi forte des grands nombres,

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i$ cv p.s. donc en loi vers α

D'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\alpha)$

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Justifier que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq e^{-\frac{1}{2}t^2}$.
   Hint : On pourra commencer par étudier $\mathbb{P}(X \geq t)$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s}} 0$.

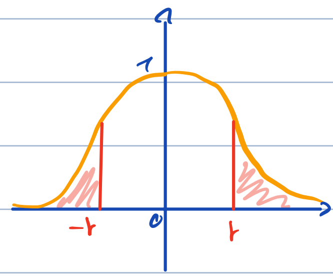
<u>Exercice 5</u> : $\forall n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1) En utilisant le Théorème Central Limite (TCL)

avec $\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n$ On a $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{n}\,\overline{X}_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

2) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $t \in \mathbb{R}_+$



$$\mathbb{P}(|X| \geq t) = 2\mathbb{P}(X \geq t) = 2\int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\leq \int_t^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \underbrace{\int_t^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$$

$$= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_t^{\infty} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Donc si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$

3) Soit $\alpha > \frac{1}{2}$, Mq $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$

On sait que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| \geq t\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \geq t\, n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}(t n^{\alpha-\frac{1}{2}})^2} \quad \text{par Q2}$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}(t^2 n^{2\alpha-1})}$$

Enfin en utilisant le lemme de Borel-Cantelli

On a bien que $\forall \alpha > \frac{1}{2}$, $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

Exercice 6. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $\alpha > 0$, on pose $Y_\alpha = X\mathbb{1}_{|X|<\alpha} - X\mathbb{1}_{|X|\geq\alpha}$.

1. Montrer que $Y_\alpha \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer qu'il existe un unique α_0 tel que $\mathrm{cov}(X, Y_{\alpha_0}) = 0$.
3. Les variables X et Y_{α_0} sont-elles indépendantes ? Le vecteur (X, Y_{α_0}) est-il gaussien ?

Exercice 6 : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\alpha > 0$, $Y_\alpha = X\mathbb{1}_{|X|<\alpha} - X\mathbb{1}_{|X|\geq\alpha}$

Soit φ une applicat° mesurable bornée.

$$\mathbb{E}(\varphi(Y_\alpha)) = \int \varphi(X)\mathbb{1}_{|X|<\alpha}\,d\mathbb{P} + \int \varphi(-X)\mathbb{1}_{|X|\geq\alpha}\,d\mathbb{P}$$

$$= \int_{]-\alpha,\alpha[} \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int_{]-\infty,-\alpha[} \varphi(-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int_{]\alpha,+\infty[} \varphi(-x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

$$= \int_{]-\alpha,\alpha[} \varphi(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{]-\infty,-\alpha[} \varphi(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{]\alpha,+\infty[} \varphi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y) \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

2) $\mathrm{Cov}(X, Y_\alpha) = \mathbb{E}(XY_\alpha) - \underbrace{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y_\alpha)}_{=0}$ car les VA sont centrées

$$\mathbb{E}(XY_\alpha) = -2\int_\alpha^\infty x^2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

analise la parité

$$= 2\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx - 1$$

Car $2\int_\alpha^\infty x^2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = 1 - \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$

Donc $Cov(X, Y_\alpha) = \mathbb{E}(XY_\alpha) = 0$ <u>ssi</u> $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2}$

L'application $\alpha \mapsto \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$ est C^0 et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1[$

Donc $\exists! \alpha_0 \in]0, +\infty[$ tq $\mathbb{E}[XY_{\alpha_0}] = 0$

3) Pour $\alpha \neq \alpha_0$, $X \not\perp\!\!\!\perp Y_\alpha$ Car $\forall \alpha \in]0,+\infty[, \alpha \neq \alpha_0$
$Cov(X, Y_\alpha) \neq 0$
Car $\perp\!\!\!\perp \Rightarrow Cov(\cdot,\cdot) = 0$

(X, Y_α) n'est pas gaussien.

$X + Y_\alpha = 0$ si $|X| \geq \alpha$ et $X + Y_\alpha = 2X$ si $|X| < \alpha$

La loi de $X+Y$ n'est pas normale (ni Dirac)
car $\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(|X| > \alpha) \in]0,1[$.
Le vecteur n'est donc pas gaussien