ERM

Chapitre 2 : Mesure de/du/des risque(s)

Très souvent le risque globale (qui peut être modélisé par une va X) est une fonction $h(x_1, \dots, x_n)$ où X_k est le k^e facteur de risque. (action, tx, morta, rachat...)

Cas particulier : (seul cas étudié dans la littérature actuarielle)

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

où les X_k représentent les gains/pertes des sous-portefeuilles

Définition

Une mesure de risque est une application $\rho : \underset{\text{v.a}}{X} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\rho(X)}$

⚠ Dans le cours, X représente une perte aléatoire
Dans la littérature financière, X peut souvent représenter un gain aléatoire $\Rightarrow$ les quantiles sont $\neq$, concavité $\Leftrightarrow$ convexité

Mesures de risque les + importantes

* $\mathbb{E}[X]$

Définition

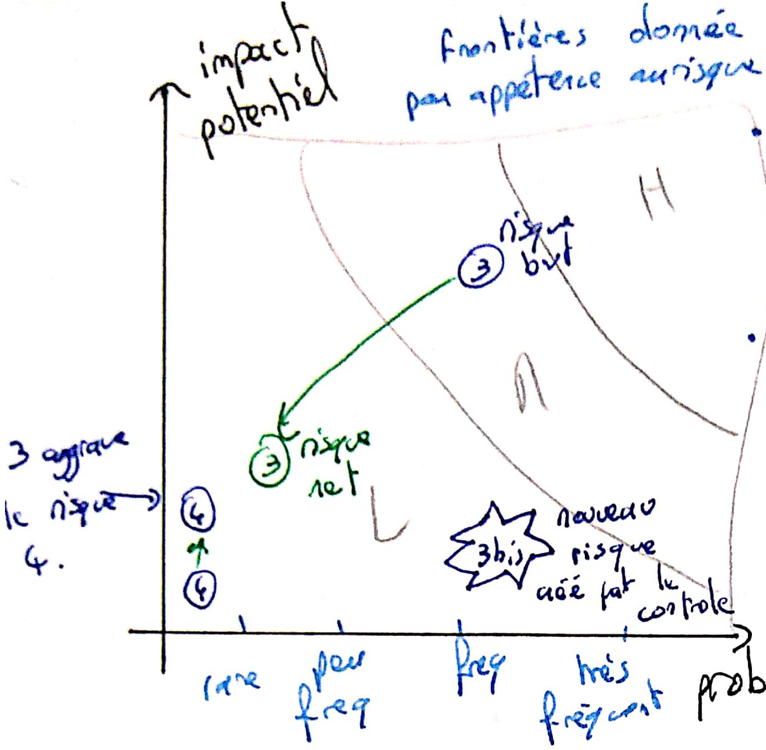
On dit que ρ contient un chargement de sécurité ≥ 0 si $\forall$ v.a X, $\rho(X) \geq E[X]$

* $\mathbb{E}[X] \times 1{,}2$ (santé) ex
* $\mathbb{E}[X] \times 1{,}4$ (hospi) ex
* $\mathbb{E}[X] + \alpha \sigma_X$
* $\mathbb{E}[X] + \beta \operatorname{Var}(X)$ ← pénalise les grosses positions en finance
* $\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\simeq BEL} + \underbrace{\gamma \big(\underbrace{VaR_{99\%}(X) - \mathbb{E}[X]}_{\simeq SCR}\big)}_{\simeq RM}$ ← Version simplifiée de S2
* $\mathbb{E}[X] + \delta \left(TVaR_{99\%}(X) - \mathbb{E}[X] \right)$ ← Suisse

⚠ Les mesures de risque ρ (au sens mathématique) ne sont utilisées que par les acteurs les + gros du marché pour quantifier le risque

Les 2 approches principales pour quantifier le risque sont

* La cartographie des risques
* L'approche par scénarios.



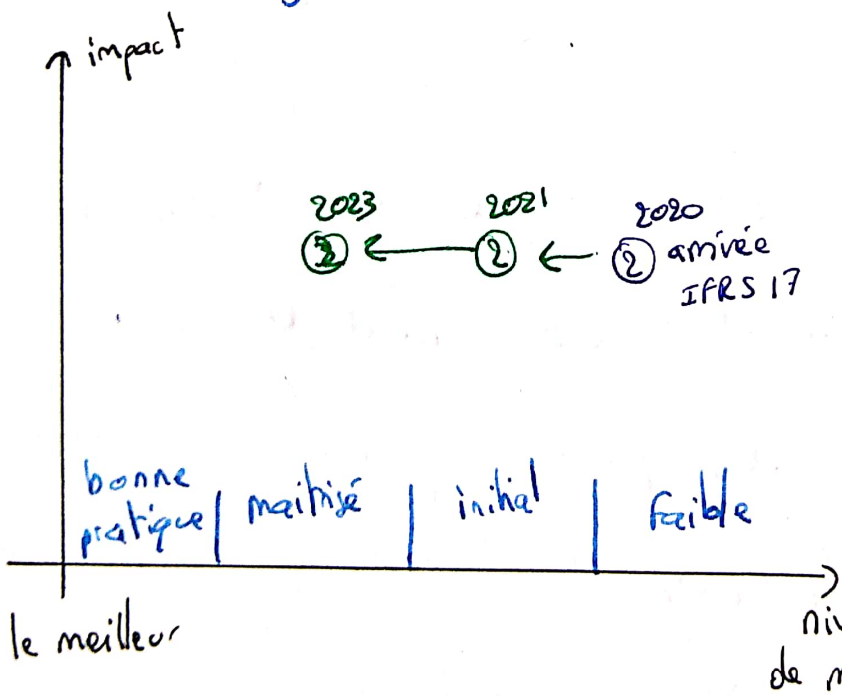
- Cartographie des risques bruts (avant contrôles des risques)
- Cartographie des risques nets (après contrôles de risque)

Très fréquent : plusieurs fois dans les 5 dernières années

Fréquent : 1 fois ——

Peu fréquent : il y a plus de 5 ans

rare : jamais arrivé.



Interessant d'un point de vue dynamique pour le comité d'audit et la direction notamment pour risques émergents et pour risques réglementaires

Etude de cas : à partir de la page 114 (à 125) sur les énergies renouvelables.

Catégories de risque :

politique, économique, sociaux, écologique

divisées en (risk phase)

Nature, Emergent, Latent

On commence par réaliser la liste des risques

Puis on réalise le "register" (cartographie précédente)

Typiquement, les fonctions de survie de la NPV se croisent une fois avant et après contrôle des risques.

Définition

On dit qu'une mesure de risque est "cohérente" au sens d'Artzner, Daelben, Eber, Heath (1999) si

(i) $\forall$ v.a $X, \forall c \in \mathbb{R}, \rho(X+c) = \rho(X) + c$ (invariance par translation)

(ii) $\forall$ va $X, \forall \lambda \geq 0, \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ (homogénéité positive)

(iii) $\forall X \leq Y$ p.s, $\rho(X) \leq \rho(Y)$ (monotone)

(iv) $\forall$ va X, Y, $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (sous additivité)

Nuancer "cohérente", pas dans le marbre

Propriété

VaR_α n'est pas sous-additive et donc pas "cohérente"

$\llcorner$ $TVaR_\alpha$ est "cohérente".

Néanmoins, VaR_α est sous-additive qd X et Y sont Gaussiennes / Lognormales.

VaR_α est super-additive pour α assez grand quand $X, Y \sim Pareto(\beta)$ avec $\beta < 1$.

⚠ Dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = +\infty$ et $TVaR(X) = +\infty$ aussi !

Avec la TailVar on a $+\infty \leq (+\infty) + (+\infty)$

Axiome alternatif

$\forall \underbrace{(X,Y) \text{ comonotone}}_{\begin{cases} X = F_X^{-1}(U) \\ Y = F_Y^{-1}(U) \end{cases},\ U \sim \mathcal{U}([0,1])}$, $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$

Prop : VaR_α et $TVaR_\alpha$ sont "comonotone-additive"

"corrélation 100%" $\longleftrightarrow$ bénéfice de diversification $= 0$

$\downarrow$

$\rho(X) + \rho(Y) - \rho(X+Y)$

Définition

$$\text{Tail VaR}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^{1} VaR_q(X)\, dq$$

Propriété

Dans le cas continu, $TVaR(X) = \mathbb{E}[X \mid X > VaR_\alpha(X)]$

Exemple

$$X = \begin{cases} 0 & \text{avec proba } 0{,}5 \\ 1 & \text{———} \ 0{,}2 \\ 2 & \text{———} \ 0{,}1 \\ 3 & \text{———} \ 0{,}1 \\ 4 & \text{———} \ 0{,}05 \\ 5 & \text{———} \ 0{,}05 \end{cases}$$

$F_X(x)$
0,5
0,7
0,8
0,9
0,95
1

- $VaR_{85\%}(X) = F_X^{-1}(85\%) = 3$
- $VaR_{90\%}(X) = F_X^{-1}(90\%) = 3$
- $TVaR_{85\%}(X) = 5\% \int_{0,85}^{0,90} VaR_q(X)\, dq + 5\% \int_{0,9}^{0,95} VaR_q(X)\, dq + 5\% \int_{0,95}^{1} VaR_q(X)\, dq$

$$= \frac{(3+4+5)\times 5\%}{15\%} = 4$$

- $TVaR_{90\%}(X) = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$

En utilisant la conditional Tail Expectation

$$CTE_{85\%}(X) = \mathbb{E}[X | X > VaR_{85\%}(X)]$$
$$= \mathbb{E}[X | X > 3]$$
$$= 4,5$$

$$CTE_{90\%}(X) = \mathbb{E}[X | X > VaR_{90\%}(X)]$$
$$= 4,5 = TVaR_{90\%} \quad \text{car} \quad F_X(VaR_{90}(X)) = 90\%$$

Jusqu'à présent, on a vu des mesures de risque du type $\mathbb{E}[X] + \ldots$

marge de risque ajoutée à la moyenne a posteriori

Autre possibilité les mesures de distorsion

1. Distorsion des probabilités
2. On fait la moyenne

Exemple: risque-neutre en finance

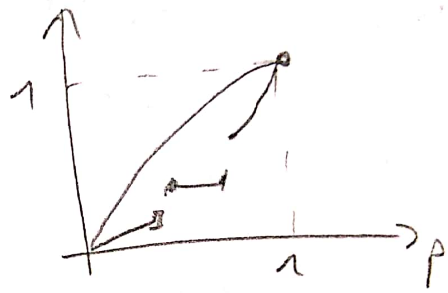
$$\underset{\text{réel}}{\mathbb{P}} \longrightarrow \underset{\text{neutre}}{\mathbb{Q}}$$

prix: espérance$_{\mathbb{Q}}$ des flux futurs actualisés.

Dans cette partie, on considère pour simplifier une v.a $X \geq 0$

Définition

Une fonction $g : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction de distorsion (des probabilités) si g croissante (au sens large), $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$



Définition

La mesure de distorsion ρ_g associée à la fonction de distorsion g est la mesure du risque tq

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(X > x))\, dx$$

Propriété

(i) Si $g = Id$ alors $\rho_{Id}(X) = \mathbb{E}[X]$

$\Rightarrow \rho_g$ contient un chargement de sécurité si $g \geq Id$

(ii) $g \leq h \Rightarrow \rho_g \leq \rho_h$

(iii) $\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X)\, dg(\alpha)$

(iv) ρ_g cohérente $\Leftrightarrow g$ concave

⚠ On parle en finance de mesures de risque convexes

Application

mesure de distorsion

Capital économique simplifié donné par $\rho(X) - \mathbb{E}[X]$

- Le CRO souhaite que ρ soit cohérente
- Le régulateur impose que ρ soit toujours plus prudent que $VaR_{99.5\%}$
- Le CEO souhaite que le capital économique soit le + petit possible en respectant les contraintes ci-dessus.

<u>Ex</u> : Déterminer la mesure de risque la + appropriée et calculer le capital économique lorsque $X \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{500}\right)$

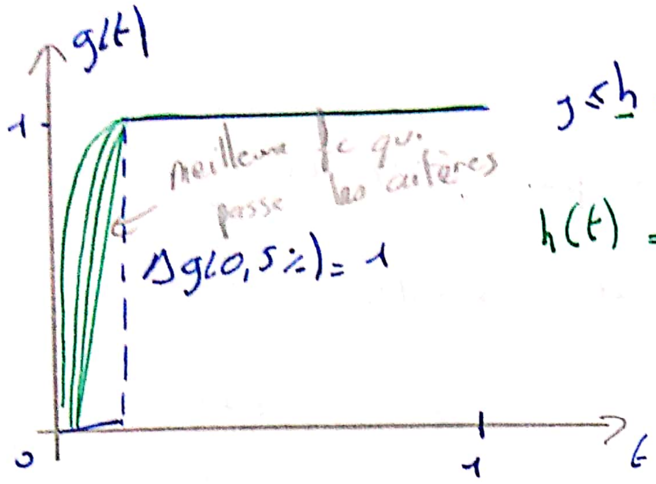
ie On cherche g tel que

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X)\, dg(\alpha) = VaR_{99.5\%}(X)$$

- cas discret : $\sum VaR_{1-\alpha_i}(X)\, \Delta g(\alpha_i) = VaR_{99.5\%}(X) \quad \forall X \quad (*)$
- cas "continu" : $\int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X)\, g'(\alpha)\, d\alpha$

Pour résoudre $(*)$.
il faut que la somme ait un unique terme et $\begin{cases} 1-\alpha_1 = 99{,}5\% \\ \Delta g(\alpha) = 1 \end{cases}$

$$g = \mathbb{1}_{[0{,}5\%, 1]}$$



$g \leq h \Rightarrow \rho_g \leq \rho_h$

$$h(t) = \left(\frac{1}{1-99,5\%} t \wedge 1 \right)$$

On calcul la mesure de distorsion pour le cas continu avec h.

$$\int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X)\, g'(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{1-99,5\%} \int_0^{0,5\%} VaR_{\underbrace{1-\alpha}_{q}}\, d\alpha = \frac{1}{1-99,5\%} \int_{99,5\%}^{1} VaR_q(X)\, dq$$

$g'(\alpha) = \frac{1}{1-99,5\%}$; $g'(\alpha) = 0$ pour $0,5\% < \alpha < 1$

$$= TVaR_{99,5\%}(X)$$

Proposition : La TVaR est la plus petite mesure de risque plus grande que la VaR

Spécificité de la loi exponentielle qui permet d'éviter de calculer une intégrale

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$TVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X > VaR_\alpha(X)] = \overbrace{\mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X) \mid X > VaR_\alpha(X)]}^{\mathbb{E}[X] \text{ car perte de mémoire}} + VaR_\alpha(X)$$

Capital économique : $TVaR_{99.5\%} - \mathbb{E}(X) = VaR_{99,5\%}(X)$

Or $VaR_{99,5\%}(X) = F_X^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$

$= -500 \ln(1-0{,}995) \simeq 2649$