ERM

Chapitre 1 : Corrélation des risques

Définition

Une fonction $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ est une fonction copule si :

(1) : $\forall u \in [0,1]$, $C(u,0) = C(0,u) = 0$

(2) : $\forall u \in [0,1]$, $C(u,1) = C(1,u) = u$

(3) C est supermodulaire (2-Increasing)

$\forall\ 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$
$\forall\ 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$
$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$

Théorème de SKLAR (1959)

$\forall$ va X et Y, il existe une fonction copule C tq

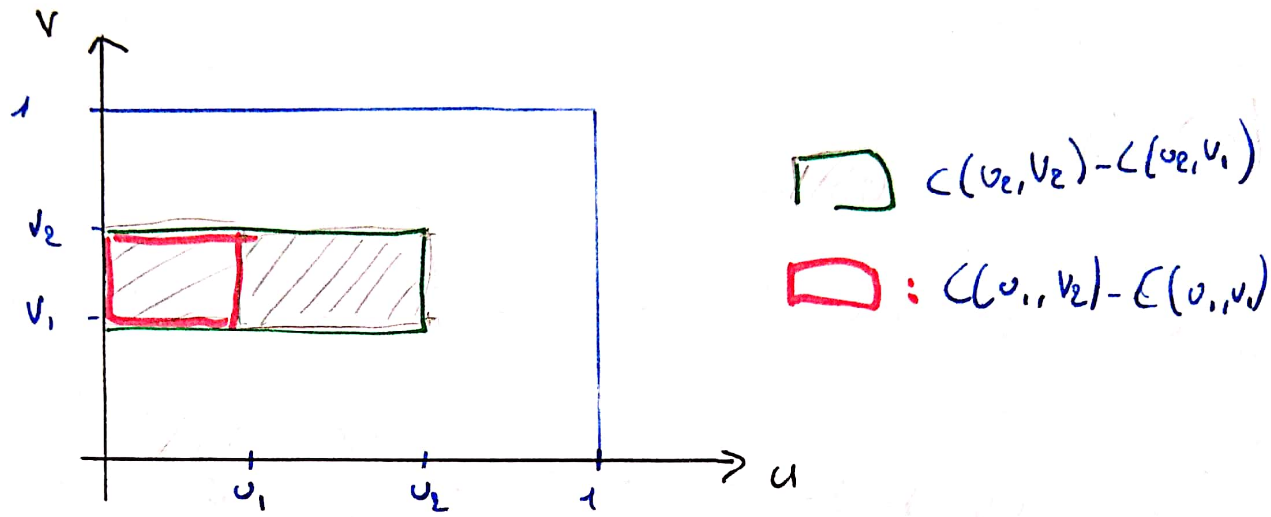
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F_{X,Y}(x,y) = C(\underbrace{F_X(x)}_{u}, \underbrace{F_Y(y)}_{v}) \geq 0$

$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$

De plus, si F_X et F_Y sont continues, alors C est unique et appelée la copule (X,Y)

NB : $X = F_X^{-1}(U)$, $U \sim Unif([0,1])$ $\quad \{U \leq u\} = \{X \leq x\}$
$Y = F_Y^{-1}(V)$, $V \sim Unif([0,1])$ (cas continu)

Donc $C(u,v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)$ pour un certain couple (U,V) dont les martingales sont $\mathrm{Unif}([0,1])$



Exercice

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} \quad \text{pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

1) Déterminer F_X et F_Y

2) Déterminer la copule C de (X,Y)

1/ $F_X(x) = \lim\limits_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

2/ $F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)) = C\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}, \dfrac{1}{1+e^{-y}}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}$

On pose $u = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\quad v = \dfrac{1}{1+e^{-y}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} - 1 = 1+e^{-x}+e^{-y} \Rightarrow C(u,v) = \dfrac{1}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-1} = \dfrac{uv}{v+u-uv}$

Faire un graphe de corrélation pour Student

1. Simuler 1000 réalisation $(X, Y) \sim$ loi de Student bivariée

$\Rightarrow (x_1, y_1) \dots \dots \dots (x_{1000}, y_{1000})$

$\Rightarrow (F_X(x_1), F_Y(y_1)) \dots \dots (F_X(x_{1000}), F_Y(y_{1000}))$

car $F_X(X) \sim \mathcal{U}nif([0,1])$ ⚠ Cas bijectif seulement

ex: $X = \begin{cases} 0 \text{ avec } p = 1/3 \\ 1 \text{ — } p = 2/3 \end{cases}$ $F_X(x) = \begin{cases} F_X(0) = 1/3 \\ F_X(1) = 1 \text{ avec } p = 2/3 \end{cases}$

Théorème

Soit α et β deux fonctions croissantes (strict^t)
Alors la copule de (X, Y) est aussi celle de $(\alpha(X), \beta(Y))$

Définition

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u,v)$$ densité de la copule C en (u,v)

Propriétés

- $C^\perp(u,v) = uv \Rightarrow c(u,v) = 1 \quad \forall (u,v) \in [0,1]^2$
- $E[h(X,Y)] = \iint h(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
- $f_{X,Y}(x,y) = c(F_X(x), F_Y(y)) \cdot f_X(x) f_Y(y)$

$\searrow f_{X,Y}^\perp(x,y) = f(x) f_Y(y)$

Définition (Ensemble de Fréchet)

$\mathcal{F}(F_x, F_y)$ ensemble des fonctions de répartition jointes F qui admettent F_x et F_y, fc de répartition marginales.

tel que $\begin{cases} \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y) = F_x(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y) = F_y(y) \end{cases}$

A des fins pédagogiques, on commence par étudier le cas où dim $= 2$. Mais en pratique en assurance-finance, dim est entre 5 et 200.

Définition (Bornes de Fréchet)(dim $= 2$)

- La borne inférieur de Fréchet de $\mathcal{F}(F_x, F_y)$ est donnée par $\max(F_x(x) + F_y(y) - 1, 0)$
- La borne supérieure de Fréchet de $\mathcal{F}(F_x, F_y)$ est donnée par $\min(F_x(x), F_y(y))$

Elles sont associées aux copules $C^1(u,v) = \max(u+v-1, 0)$

$C^2(u,v) = \min(u,v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)$ pour $U = V$

dans le cas dit COMONOTONE : "corrélé à 100%"

pour $V = 1 - U$: cas ANTIMONOTONE "corrél égale à -100%"

On pourrait montrer que si $C \leq \tilde{C}$, alors les variables qui admettent $\tilde{C}$ comme structure de corrélation sont corrélés plus positivement (dans un certain sens) que celle qui admettent C comme structure de corrélation.

En dim ≥ 3

On peut généraliser les définitions et propriétés de la dimension 2

$C(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d)$ où $U_i \sim \mathcal{U}nif([0,1])$

$$E[h(X_1, \dots, X_d)] = \int \dots \int h(x_1, \dots, x_d)\, c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d))\, f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_d}(x_d)\, dx_1 \dots dx_d$$

⚠ Mais, deux choses ne marchent plus

+ la borne inférieure de Fréchet existe toujours mais n'est plus associée à une copule.
En effet, il est impossible d'avoir une "corrélation de -100%" à la fois entre X et Y, X et Z, Y et Z.

* La compatibilité des modèles marginaux de dim 2.
A part dans le cas des vecteurs gaussiens, il ne suffit pas d'étudier les corrélations deux à deux pour avoir la corrélation globale.
Le plus souvent, les modèles de dim 2 sont incompatibles entre eux.
Il existe néanmoins une (plusieurs) manière(s) de construire un modèle de dim d à partir de copules de dim 2.
(cf. exposé sur les VINE COPULAS)

Mesures de corrélation en ERM

3 mesures étudiées :

1. Coefficient de corrélation linéaire
2. τ de Kendall
3. Coefficient de dépendance des extrêmes

1. Coefficient de corrélation linéaire

Définition

$$r_{lin}(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propriété

Stable par transformation affines

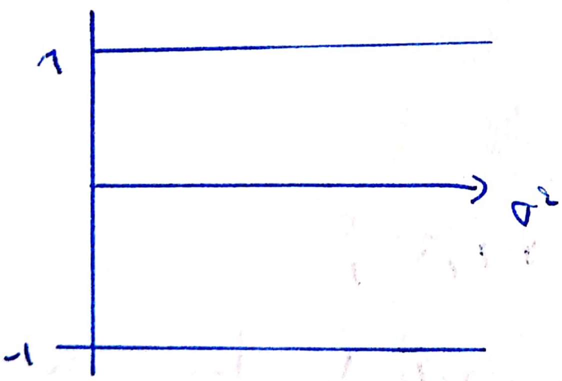
$\forall X, Y, \quad r_{lin}(aX+b, cX+d) = \mathrm{sgn}(ac)\, r_{lin}(X,Y) \quad \forall a,c \neq 0 \ \forall b,d \in \mathbb{R}$

MAis par exemple, en général $r_{lin}(e^X, e^Y) \neq r_{lin}(X,Y)$

alors que la structure de corrélation de (e^X, e^Y) est la même que celle de (X,Y)

$\Rightarrow$ r_{lin} est influencé par les lois marginales et n'est donc PAS une "vraie" mesure de corrélation

Valeurs min et max de $r_{lin}(X,Y)$ où $\begin{cases} X \sim LN(0,1) \\ Y \sim LN(0, \sigma^2) \end{cases}$



On s'attend à avoir le graphe blanc (cf. slides) car

$F_Y^{-1}(F_X(X)) = Y$ correspond au cas COMONOTONE "corrél. 100%"

Quand σ est grand, r_{lin} est nécessairement très petit (proche de 0), il peut donc sous-estimer la corrélation entre X et Y et donc le risque global.

<u>MAIS</u> en pratique σ est grand $Y \gg X$ et donc $Y + X \simeq Y$

2. <u>Le τ de Kendall</u>

Une "vraie" mesure de corrélation : le τ de Kendall

Notion de concordance

	Floride X	Louisiane Y
2022	100 m \$	5 m
2023	20 m	1 m
2024	90 m \$	6 m \$

Définition

$$\tau(X,Y) = \overbrace{\mathbb{P}\left((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})>0\right)}^{\text{Proba de concordance}} - \overbrace{\mathbb{P}\left((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})<0\right)}^{\text{Proba de discordance}}$$

où $(\tilde{X},\tilde{Y})$ est une copie $\perp$ de (X,Y) ($\hat{m}$ loi jointe que (X,Y) et $(X,Y) \perp (\tilde{X},\tilde{Y})$)

Cela ne veut surtout pas dire que $\tilde{X} \perp \tilde{Y}$.

Version empirique : $\hat{\tau} = \dfrac{(\text{nb paires concordantes}) - (\text{nb paires discordantes})}{\text{nb paires total}}$

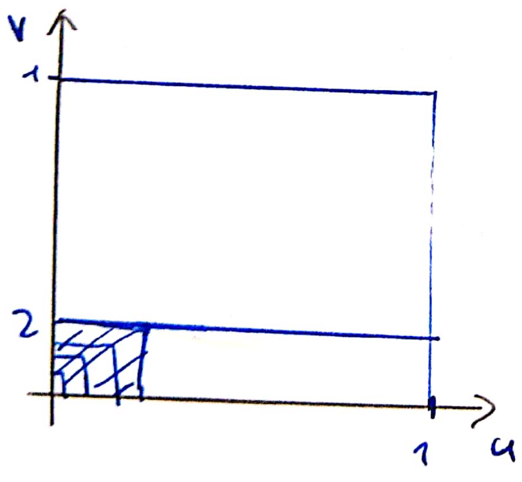
Dans l'exemple : 2022 - 2023 : concordante
2022 - 2024 : descendante
2023 - 2024 : concordante

$$\hat{\tau} = \frac{2 - 1}{3} = +1/3$$

Propriété

$$\tau = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u,v) \, d\underbrace{C(u,v)}_{c(u,v)\,du\,dv} - 1$$

τ ne dépend que de la structure de corrélation entre X et Y. C'est une vraie mesure de corrélation



Définition

On dit que la copule C (ou le couple de va qui admet le copule) présente de la dépendance forte des extrêmes

à gauche	si	$L > 0$
à droite		$R > 0$

Sinon les risques sont dits asymptotiquement indépendants

- La copule Gaussienne ne présente PAS de dépendance FORTE des extrêmes.

MAIS elle présente de la dépendance FAIBLE des extrêmes

$\Rightarrow$ vu en détail dans l'exposé n°1

- La copule de Student présente de la corrélation des extrêmes à gauche et à droite

Définition : (Risque endogène)

Source de risque extrême et de corrélation des extrêmes

Exercice

$X \sim Exp(2)$ $\quad$ $U = F_X(X)$

$Y \sim Exp(5)$ $\quad$ $V = F_Y(Y)$

C copule de (X, Y)

Rappel : $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$

Exprimer $\mathbb{P}(U \leq u, V > v)$, $\mathbb{P}(X \leq x \mid V \leq v)$, $\mathbb{P}(X > x \mid Y \leq y)$

$\mathbb{P}(X > x, Y > y)$, $\mathbb{P}(X > VaR_{99}(X) \mid Y > VaR_{99\%}(Y))$

① $\mathbb{P}(U \le u) = \mathbb{P}(U \le u, V > v) + \mathbb{P}(U \le u, V < v)$

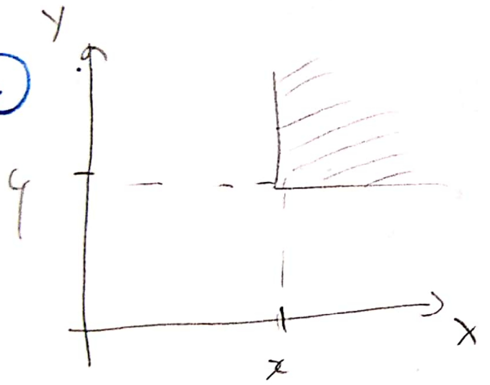
$$\Rightarrow \mathbb{P}(U \le u, V > v) = \mathbb{P}(U \le u) - \mathbb{P}(U \le u, V \le v) = u - C(u,v)$$

② $\mathbb{P}(X \le x \mid V \le v) = \dfrac{\mathbb{P}(X \le x, V \le v)}{v}$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \le F_X^{-1}(u), V \le v)}{v} = \frac{\mathbb{P}(F_X(X) \le u, V \le v)}{v}$$

$$= \frac{C(u,v)}{v} = \frac{C(1-e^{-2x}, v)}{v} \qquad x = F_X^{-1}(u)$$

④



$\mathbb{P}(X > x, Y > y) =$

$$= 1 - \mathbb{P}(X < x) - \mathbb{P}(Y < y) + \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$$

$$= 1 - (1-e^{-2x}) - (1-e^{-5y}) + C(1-e^{-2x}, 1-e^{-5y})$$

$$= C(1-e^{-2x}, 1-e^{-5x}) + e^{-2x} + e^{-5y} - 1$$

Utile pour définir les "copules de survie"

③ $\mathbb{P}(X > x \mid Y \le y) = 1 - \mathbb{P}(X \le x \mid Y \le y)$

$$= 1 - \frac{C(\mathbb{P}(X \le x), \mathbb{P}(Y \le y))}{\mathbb{P}(Y \le y)}$$

$$= 1 - \frac{C(1-e^{-2x}, 1-e^{-5y})}{1-e^{-5y}}$$

(5) $\mathbb{P}(X > VaR_{99\%}(X) \mid Y > VaR_{99}(Y))$

$$= \mathbb{P}(X > F_X^{-1}(99\%) \mid Y > F_Y^{-1}(99\%))$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(99\%) \mid Y > F_Y^{-1}(99\%))$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(99), Y > F_Y^{-1}(99))}{\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(99\%))}$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(99\%)) - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(99), Y \leq F_Y^{-1}(99))}{1 - \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(99\%))}$$

$$= 1 - \frac{99\% - C(99\%, 99\%)}{0{,}01}$$

fait intervenir uniquement la copule de (X,Y)