

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET
D'ASSURANCES

Cas pratique 1 : Construction de la
courbe de taux de marché

Théo JALABERT

15 avril 2024

Ce rapport a pour objectif de synthétiser une partie des notions abordées dans le cours de Gestion Actif/Passif à l'ISFA : la construction de la courbe de taux de marché à partir des taux CMS.

Nous avons en notre possession les données de taux CMS fournis par l'énoncé.

Ces données ont été interpolées linéairement entre chaque année présente afin d'obtenir un taux CMS de 1 an à 50 ans.

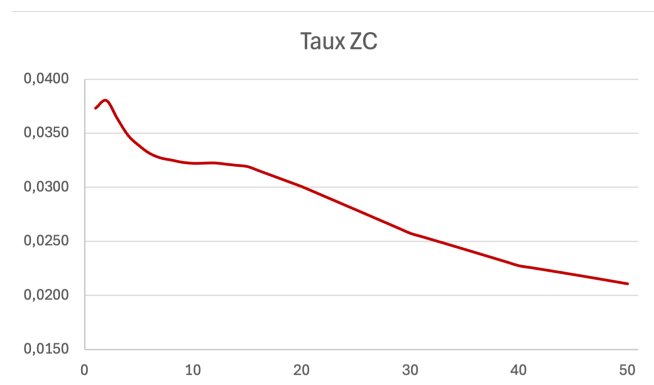
Une fois tous les taux obtenus, nous devons calculer les prix zéro-coupons pour chaque année. Comme vu en cours, on peut déduire les prix des zéro-coupons à partir des taux de rendements actuariels des obligations au pair par la formule récursive (Méthode de Bootstrapping) :

$$\forall T, B(0, T) = \frac{1 - \sum_{t=1}^{T-1} \text{CMS}_T B(0, t)}{1 + \text{CMS}_T}$$

Sous la convention simple, on peut calculer le taux zéro coupon :

$$r_T = \left(B(0, T) \right)^{-\frac{1}{T}} - 1$$

Nous obtenons ainsi :



Par la suite, nous allons chercher à calculer la chronique des taux CMS forward 1 an et 10 ans. On se retrouve donc avec un tableau à double entrée, la maturité du titre en colonne et les années de projections en ligne.

Pour obtenir les prix CMS forward, nous sommes obligés de passer par les taux ZC forward.

Soit $F(0, t, T - t)$ le prix vu à t du ZC de maturité $T - t$.

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et pour tout $t < T$ on a :

$$B(0, T) = B(0, t) \times F(0, t, T - t) \Rightarrow F(0, t, T - t) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)}$$

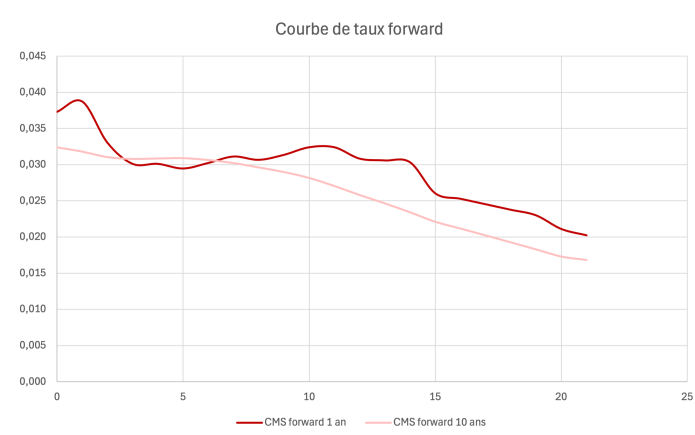
On peut construire les courbes de taux ZC forward pour tout $t \geq 0$, selon la convention simple :

$$\text{Forward}_{t,T} = F(t, T)^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

En reprenant l'égalité de départ, on peut calculer les taux CMS projetés de maturité $T > 0$ à l'instant t :

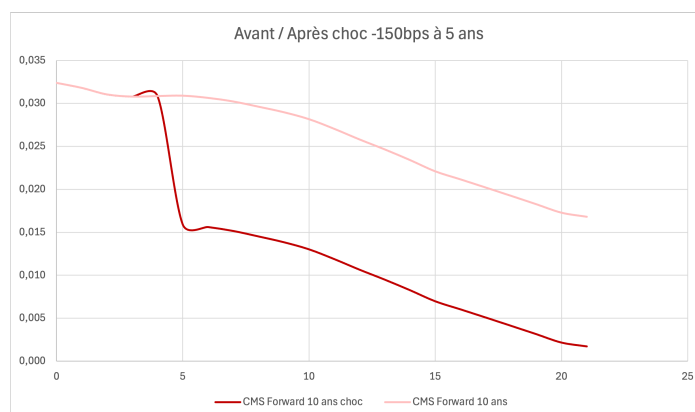
$$F_{\text{CMS}}(t, T) = \frac{1 - \frac{B(0, T+t)}{B(0, t)}}{\sum_{i=1}^T \frac{B(0, t+i)}{B(0, t)}} = \frac{1 - F(t, T)}{\sum_{i=1}^T F(t, i)}$$

Ainsi, nous obtenons la chronique des taux forward 1 et 10 ans :



Enfin, nous allons appliquer un choc à la courbe de taux forward de -150 bps. Pour cela, nous devons calculer les taux ZC forward. À partir de ces taux, nous allons appliquer le choc de 150 bps pour tous les taux de la cinquième année. Une fois les taux ZC 5 ans choqués, nous pouvons recalculer les Forward ZC de la même manière que pour la partie précédente :

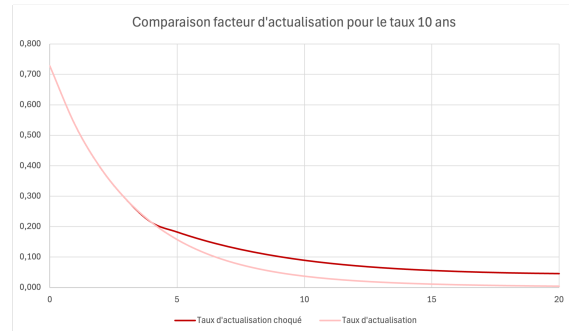
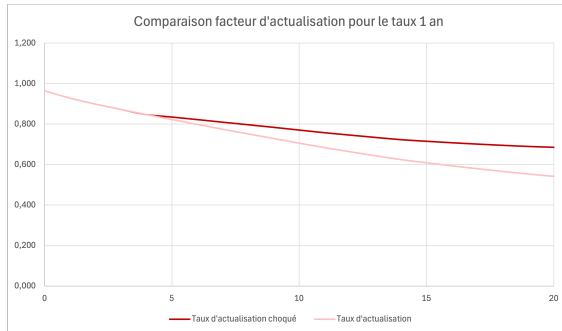
- Les années de 0 à 4 sont les mêmes que dans la courbe de taux forward précédente ;
 - L'année 5 nécessite le calcul du prix ZC avec le nouveau taux choqué sous la formule : $(1 + \text{taux}_{\text{choqué}})^t$;
 - Les taux suivant sont calculés comme précédemment avec $F(0, t, T - t) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)}$;
- Les taux CMS forward choqués à 10 ans donnent donc :



Il ne reste plus qu'à calculer le facteur d'actualisation demandé. Ces facteurs d'actualisation se calculent sur les prix ZC obtenus via la formule suivante :

$$B^{\text{Choc}}(0, T) = B(0, 1) \prod_{t=1}^4 F(0, t, 1) \prod_{t=5}^{T-1} F^{\text{choc}}(t, T)$$

Via cette formule, on peut calculer les facteurs d'actualisation pour les taux ZC forward 1 et 10 ans pour les années 1 à 20.



Fin du Rapport