Master 2 P&F
Master 2 P.M.A.

G. PAGÈS 2023-24

Probabilités Numériques

Exercices pour la séance du 23/10/23

Exercice 1. On se place dans un modèle de Black-Scholes uni-dimensionnel où
$$X_t^{x,\sigma,r} = x \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right),\quad t\in[0,T] \qquad x\in\mathbb{R}_+^*$$

1. Montrer que pour tout $t\in]0,T]$, $X_t^{x,\sigma,r}$ a une densité log-normale et plus précisément que
$$X_t^{x,\sigma,r} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \exp\left(-\frac{\left(\log\left(\frac{y}{x}\right)-\mu t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\frac{dy}{\sigma\sqrt{2\pi t}\,y}$$
où μ est une constante que l'on précisera.

2. En déduire que si $\Phi:(\mathbb{R}_+^*)^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est défini par
$$\Phi(x,\sigma,r) = \mathbb{E}\,\varphi(X_T^{x,\sigma,r}) \quad \text{pour un } T>0 \text{ et } \varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}^*$$
une fonction borélienne à croissance polynomiale, alors, sous des hypothèses supplémentaires éventuelles que l'on précisera
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,\sigma,r) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^{x,\sigma,r})\frac{W_T}{x\sigma T}\right]$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}(x,\sigma,r) = \mathbb{E}\left[\varphi'(X_T^{x,\sigma,r})\,X_T^{x,\sigma,r}(W_T-\sigma T)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^{x,\sigma,r})\left(\frac{W_T^2-T}{\sigma T}-W_T\right)\right].$$

Exercice 2. On se place dans un cadre général de méthode de log-vraisemblance i.e. $X_T(\theta) \overset{\mathcal{L}}{\sim} p_T(\theta,y)\,\mu(dy)$ où $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}$ (ouvert) et μ est une mesure σ-finie sur l'espace d'états de $X_T(\theta)$, disons $\mathbb{R}^d$ pour simplifier. On suppose que $\partial_\theta p_T(\theta,y)$ existe pour tout $(\theta,y)\in\Theta\times\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que, sous des hypothèses "raisonnables" que l'on précisera
$$\forall\theta\in\Theta \qquad \mathbb{E}\left[\partial_\theta \log p_T(\theta,X_T(\theta))\right]=0$$

2. En déduire une heuristique systématique pour construire des candidates à être des variables de contrôle dans une simulation de Monte Carlo en vue du calcul de $\Phi'(\theta)$ où $\Phi(\theta):=\mathbb{E}[\varphi(X_T(\theta))]$.

Exercice 3. On se place dans un modèle de Black-Scholes 2D (cf. cours) i.e.
$$X_t^i = x_i\exp\left(\left(r-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)t+\sigma_i W_t^i\right),\quad x_i>0,\quad t\in[0,T] \text{ et } \langle W^1,W^2\rangle_t=\rho t$$
où $\rho\in]-1,1[$. On considère le payoff européen
$$h_T = \left(\frac{X_T^1+X_T^2}{2}-K\right)^+ \qquad \text{où } K\in\mathbb{R}_+^*.$$

1. Expliquer pourquoi l'option européenne "écrite" sur h_T n'admet pas de formule fermée (sans préjuger du fait qu'un pricing par EDP est possible).

2. Montrer que $\quad h_T \geq k_T = \left(\sqrt{X_T^1 X_T^2} - K\right)^+$
et expliquer comment tirer partie de cette inégalité.

3. Exprimer $\quad e^{-rT}\mathbb{E}k_T$ en fonction de la fonction de pricing du Call_{BS}, en l'occurrence

$$\mathrm{Call}_{BS}(x, K, r, \sigma, T) = x\,\Phi_0(d^+) - Ke^{-rT}\Phi_0(d^-)$$

où $d^{\pm}(x,K,r,\sigma,T) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\dfrac{x}{K}\right) + \left(r \pm \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\right)$ et $\Phi_0(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\dfrac{d\xi}{\sqrt{2\pi}}$.

4. Evaluer l'efficacité de k_T en tant que pseudo-variable de contrôle (on prendra $x^1 = x^2 = 100$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}3$, $r = 0{,}05$, $\rho = \pm 0{,}5$ et K variant de 90 à 110) en mettant en oeuvre une simulation de Monte Carlo. (La mesure d'efficacité est laissée à votre choix).

Exercice 4. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une variable réelle et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $\quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{B})\right]$ et justifier sans calcul que
$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) \leq \mathrm{Var}(X)$ avec $=$ ssi $X \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

2. Affiner cette affirmation en établissant l'identité

$\perp$ ds L^2

$$\mathrm{Var}(\underline{\mathbb{E}(X|\mathcal{B})}) + \mathbb{E}(\underline{X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B})})^2 = \mathrm{Var}(X).$$

3. Comment utiliser ce qui précède pour pricer une option "Best-of" : $h_T = (X_T^1 \vee X_T^2 - K)^+$, dans le modèle de Black-Scholes de l'exercice 3 lorsque $\rho = 0$.

Exercice 5. mini-projet 3

Soit $(S_t)_{t\in[0,T]}$ une dynamique d'actif risqué sous probabilité risque-neutre i.e. $\quad \forall t \in [0,T] \quad S_t \geq 0, \quad S_0 = s_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$-martingale sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. On considère les deux payoffs "asiatiques" suivants, où $\quad 0 < T_0 < T$:

$$\text{"Call"} : \left(\frac{1}{T-T_0}\int_{T_0}^{T} S_t\,dt - K\right)^+ \quad \text{et "Put"} : \left(K - \frac{1}{T-T_0}\int_{T_0}^{T} S_t\,dt\right)^+.$$

1. Établir la relation de parité Call-Put associée à ces deux payoffs.
2. En déduire une méthode réduction de variance pour les options écrites sur ces payoffs (on prendra en compte la complexité).

N°1 Calculer les sensibilités par la méthode de la log-vraisemblance.

$$X_t^x = x\exp\{\mu t + \sigma W_t\} \qquad W_t \overset{\mathcal{L}}{\sim} \sqrt{t}\,Z \quad \text{à tps fixé}$$

$$\Phi(x) = \mathbb{E}[f(X_T^x)] = \int f(\underbrace{x e^{\mu T + \sigma\sqrt{T} z}}) e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \left\{ z = \frac{\log(\frac{y}{x}) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = \varphi(y)\right.$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{T}} \Big\} = \int f(y) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y/x) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}\, y\sigma\sqrt{T}}$$

$$p_T(x,\sigma,y) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log y/x - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2} \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi T}}$$

$$\Phi'(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^x)\, \partial_x \log p_T(x,\sigma,X_T^x)\right]$$

$$\log p_T(x,\sigma,y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\log y/x - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 - \log y - \log \sigma\sqrt{2\pi T}$$

$$\partial_x \log p_T(x,\sigma,y) = -\frac{2}{2\sigma^2 T}\cdot\left(\log\frac{x}{y} + \mu T\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\partial_x \log p_T(x,\sigma,X_T^x) = \frac{\mu T + \sigma W_T - \mu T}{\sigma^2 T x} = \frac{W_T}{\sigma T x}$$

$\Rightarrow \Phi'(x) = \mathbb{E}\left[f(X_T^x)\frac{W_T}{x\sigma T}\right]$ même formule que via le lemme de Stein.

À l'origine $\Phi(x) = \int f(y)\, p_t(x,\sigma,y)\, dy$

$$\Phi'(x) = \int f(y)\, \partial_x p_t(x,\sigma,y)\, dy$$

Thm global ? $x \in]\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}[$, $\varepsilon \in]0,1[$

$$\partial_x\left(e^{-\frac{(\log\frac{y}{x} - \mu T)^2}{2\sigma^2 T}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}\, y}\right) = -2\,\frac{\log y/x - \mu T}{\sigma^2 T x} \cdot \frac{e^{-\frac{(\log y/x - \mu T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma y}$$

$$|\cdots| \leq 2\,\frac{|\log y| + \mu T + |\log \varepsilon|}{\sigma^2 T \varepsilon}\, e^{-\frac{(\dots)^2}{2\sigma^2 T}}$$

$$(a-b)^2 \geq \frac{a^2}{2} - b^2 \iff \frac{a^2}{2} - 2ab + 2b^2 \geq 0 \iff \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,b\right)^2 \geq 0$$

$$\frac{(\log y - \mu T - \log x)^2}{2\sigma^2 T} \geq \frac{(\log y - \mu T)^2}{4\sigma^2 T} - \frac{(\log x)^2}{2\sigma^2 T} \geq \frac{(\log y - \mu T)^2}{4\sigma^2 T} - \frac{(\log \varepsilon)^2}{2\sigma^2 T}$$

$$e^{-(\dots)} \leq e^{-\frac{(\dots)^2}{4\sigma^2 T}} \cdot C_\varepsilon \Rightarrow \partial_x p \in L^1$$

N°1 (2a) $X_t^x = x \exp\{-(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\}$

1) $\mathcal{L}(X_t^{x,\sigma,r}) \sim \exp\left\{\frac{-\left((\log \frac{y}{x}) - \mu t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \frac{du}{\sigma\sqrt{2\pi}\, y t}$ $\qquad \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$

$$\Phi(x,\sigma,r,T) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^{x,r,\sigma})]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^{x,r,\sigma})\, \frac{W_T}{x\sigma T}\right]$$

(2b) $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = ?$

Si φ régulière $\Phi(\sigma) = \mathbb{E}[\varphi(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T})]$

Formel^t $\Phi'(\sigma) = \mathbb{E}\left[\varphi'\left(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T}\right) e^{\cdots} \cdot (W_T - \sigma T)\right] =$

$= \mathbb{E}[\varphi'(X_T)\, X_T (W_T - \sigma T)]$ $\qquad$ <u>Exo</u> Utiliser Girsanov pour simplifier.

Valider si par exemple φ est à $\nearrow$ polynomiale

Thm global sur $I = [0, 1/\varepsilon[$ $\quad 0 < \varepsilon < 1$ $\quad |\varphi'(u)| \leq C(1 + |u|^p)$ $\quad u > 0$

$$|\varphi'(X_T) X_T (W_T - \sigma T)| \leq C'(1 + |X_T|^{1+p})(|W_T| + \sigma T) \leq C\left(1 + |x|^{p+1} e^{(p+1)(rT + \sigma|W_T|)}\right)(|W_T| + \sigma T) \leq$$

$$\leq C\left(1+|x|^{p+1} e^{(p+1) r T + \frac{1}{\varepsilon}|W_T|}\right)\left(|W_T| + \frac{T}{\varepsilon}\right) \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\forall \lambda > 0 \quad \mathbb{E} e^{\lambda |W_T|} \leq \mathbb{E} e^{\lambda W_T} + \mathbb{E} e^{-\lambda W_T} = 2 \mathbb{E} e^{\lambda W_T} = 2 e^{\frac{\lambda^2 T}{2}} < \infty$$

$$\partial_\sigma \Phi(\sigma) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T)\, \partial_\sigma \log p(\sigma, X_T)\right]$$

$$\log p(\sigma, X_T) = -\frac{\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T} - \log \sigma - \log\left(y\sqrt{2\pi T}\right)$$

$$\partial_\sigma \log p(\sigma, X_T) = -\frac{2\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}T\right)\right)\sigma T}{2\sigma^2 T} + \frac{\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2 4\sigma T}{4\sigma^4 T^2} - \frac{1}{\sigma}$$

$$= -\frac{\log\left(\frac{y}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}T\right)}{\sigma} + \frac{\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) - \mu T\right)^2}{\sigma^3 T} - \frac{1}{\sigma}$$

$\partial_\sigma \log p(\sigma, X_T) = ?$ $\quad \log\left(\frac{X_T}{x}\right) - \mu T = \sigma W_T$ donc

$$\partial_\sigma \log p(\sigma, X_T) = -W_T + \frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} = \frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma} = \frac{W_T^2 - T}{\sigma T} - W_T$$

$$\Rightarrow \partial_\sigma \Phi(\sigma) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T)\left(\frac{W_T^2 - T}{\sigma T} - W_T\right)\right]$$

<u>Justifier</u> $\quad \Phi(\sigma) = \int \varphi(y)\, p(\sigma, y)\, dy$

$$\downarrow$$

$$\Phi'(\sigma) = \int \varphi(y)\, \partial_\sigma p(\sigma, y)\, dy$$

$\forall \sigma > 0 \quad p(\sigma, y) > 0 \quad dy$ - p.p. sur $\mathbb{R}_+$

$|\varphi(y)| \cdot |\partial_\sigma p(\sigma, y)| \qquad \sigma \subset]\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}[$

$$\leq C(1+|y|)^p \frac{K}{\varepsilon^3}(\tilde{c} + |y|)$$

N2 $\quad \mathbb{E}[\partial_\theta \log_T(\theta, X(\theta))] = 0 \,?$

1) $(*)$ (avec $\sigma \to \theta$ et $\varphi = 1$)

$$\underbrace{\partial_\theta \mathbb{E}[1]}_{=0} = \mathbb{E}[\partial_\theta \log p_T(\theta, X_T(\theta))] = 0$$

formel^t, $\mathbb{E}[\partial_\theta \log p_T(\theta, X_T(\theta))] = \int \frac{\partial_\theta p}{\cancel{p}} \cdot \cancel{p}\, \mu(dy) = \partial_\theta \underbrace{\int p\mu(dy)}_{=1}$

$\forall \theta \in \Theta \quad p_T(\theta, y) > 0 \quad \mu$ pp.

$\forall \theta \in \Theta \quad \sup_{\tilde\theta \in [\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon] \cap \Theta} |\partial_\theta p_T(\tilde\theta, y)| \in L^1(\mathbb{P})$ pour un epsilon suffisamment petit.

2. A quoi ça sert? Variables de contrôle. Dans le cas des diffusions si σ petit : $\mathbb{E}[(\varphi(X_T(\theta)) - x\varphi(x))\partial_\theta \log p_T(\theta, X(\theta))] =$

$= \partial_\theta \mathbb{E}[\varphi(X_T(\theta))]$

$\mathbb{E}[(\ldots)^2]$ se minimise explicitement en x.

N°3 B-S 2D $X_t^i = x^i \exp\{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_t^i\}$

1) $h_T = \left(\frac{X_T^1 + X_T^2}{2} - K\right)^+$ la somme de 2 log-normales

2) $h_T \geq k_T = \left(\sqrt{X_T^1 X_T^2} - K\right)^+$

k_T pseudo-variable de contrôle. Calculer $e^{-rT}\mathbb{E}[k_T]$

$$\sqrt{X_T^1 X_T^2} = \sqrt{x^1 x^2} \exp\left\{\left(r - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{4}\right)t + \frac{\sigma_1}{2} W_t^1 + \frac{\sigma_2}{2} \underbrace{W_t^2}_{\rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, B_t}\right\} =$$

$$= \sqrt{x^1 x^2} \exp\left\{\left(r - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{4}\right)t + \frac{\sigma_1+\rho\sigma_2}{2} W_t^1 + \frac{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2} W_t^2\right\} =$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(\sigma_1+\rho\sigma_2)^2 + \sigma_2^2(1-\rho^2)}{4}$$

$$\overset{\mathcal{L}}{=} \underbrace{\sqrt{x^1 x^2} \exp\left\{\left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{4}\right)t\right\}}_{\tilde{S}_0} \exp\left\{\left(r - \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{2}\right)t + \tilde{\sigma}_1 B_t\right\}$$

$$e^{-rk}\mathbb{E}\, k_T = BS(\tilde{S}_0, K, T, \tilde{\sigma}, r)$$

N°4 $\mathbb{E}(X_T^1 \vee X_T^2 - K)^+ = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_T^1 \vee X_T^2 - K)^+ \mid X_T^1]]$

On considère le cas $\rho = 0$

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}[((X_T^1 \vee X_T^2) - K)^+ \mid X_T^1 = x_T^1]$$

- $x_T^1 < K \Rightarrow V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}(X_T^2 - K)^+ = BS(x_2, K, T, \sigma_2, r)$

- $x_T^1 > K \Rightarrow$ Payoff $= (x_T^1 - K)^+ \vee (X_T^2 - K)^+ = (x_T^1 - K)^+ + (X_T^2 - x_T^1)^+ \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_0 = e^{-rT}(x_T^1 - K)^+ + BS(x_2, x_T^1, T, \sigma_2, r)$$