

Cours 4 "Processus stochastiques et produits dérivés"

emmanuel.gobet@polytechnique.edu

PLAN DU COURS

Ch. III Retour sur la couverture des risques (point de vue dynamique, dim 1 MBG)

III.1 Raffinements supplémentaires sur la formule de Black-Scholes

III.2 Options barrière dans le cas Black-Scholes

III.3 Delta-Hedging à temps discret

III.4 Delta-Gamma-Hedging à temps discret

III.1 RAFFINEMENTS SUPPLÉMENTAIRES SUR LA FORMULE DE BS

Extension aux titres versant un dividende continu

 Détenir S pendant dt rapporte $S \times q \times dt$: approximation panier d'actions, prise en compte du taux de repo lors du prêt de titre et vente à découvert.

Définition et Proposition. Un portefeuille autofinçant investi dans le cash et le titre S (**versant un dividende continu au taux q par unité de temps**) a à la date t pour valeur liquidative $V_t = \delta^0(t)S_t^0 + \delta(t)S_t$, et sa dynamique est

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \delta^0(u) dS_u^0 + \delta(u)(dS_u + \mathbf{qS_u du}) \\ &= V_0 + \int_0^t rV_u du + \int_0^t \delta(u)(dS_u + (q - r)S_u du). \end{aligned}$$

Objectif de couverture d'un Call pour le vendeur d'un contrat

Tracking error nulle $\iff V_T = h(S_T)$.

EDP de valorisation et représentation risque-neutre

Théorème. Soit h une fonction mesurable, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière $v(t, x)$ sur $]0, T[\times]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + (\mathbf{r} - \mathbf{q}) x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - rv(t, x) = 0, \\ v(T, x) = h(x). \end{cases}$$

Le flux $h(S_T)$ est duplicable par un portefeuille autofinanciant, dont la valeur à la date t est $v(t, S_t)$, et celle du portefeuille de couverture $\delta(t, S_t) = v'_x(t, S_t)$.

Théorème. Soit $(\tilde{S}_t)_t$ un titre fictif de dynamique :

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = (\mathbf{r} - \mathbf{q})dt + \sigma dW_t,$$

avec W un mouvement brownien sous une probabilité $\mathbb{Q}$. Alors la solution de l'EDP d'évaluation est donnée par

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} h(\tilde{S}_T) | \tilde{S}_t = x].$$

Formule de Black-Scholes avec dividende

Théorème.

1. La fonction prix d'un Call de maturité T et de prix d'exercice K sur un titre versant un dividende au taux continu q est donnée par

$$\begin{aligned}\text{Call}(t, x, T, K) = & x e^{-q(T-t)} \mathcal{N} \left[d_1(T-t, x e^{(r-q)(T-t)}, K) \right] \\ & - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left[d_0(T-t, x e^{(r-q)(T-t)}, K) \right].\end{aligned}$$

2. De plus, cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\delta(t) = \text{Call}'_x(t, S_t, T, K) = e^{-q(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, S_t e^{(r-q)(T-t)}, K)]$$

parts de titre S .

3. Formules analogues pour les Puts :

$$\begin{aligned}\text{Put}(t, x, T, K) = & K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, K, x e^{(r-q)(T-t)})] \\ & - x e^{-q(T-t)} \mathcal{N}[d_0(T-t, K, x e^{(r-q)(T-t)})].\end{aligned}$$

Valorisation des options binaires/digitales

Contrat financier, dont le flux en T est de la forme

- a) $\mathbf{1}_{S_T > K}$ ($\rightsquigarrow$ BinC)
- b) $\mathbf{1}_{S_T < K}$ ($\rightsquigarrow$ BinP)

Théorème.

$$\text{BinC}(0, x, T, K) = -\partial_K \text{Call}(0, x, T, K) = e^{-rT} \mathcal{N} \left[d_0(T, x e^{(r-q)T}, K) \right].$$

$$\text{BinP}(0, x, T, K) = \partial_K \text{Put}(0, x, T, K) = e^{-rT} \mathcal{N} [d_1(T, K, x e^{(r-q)T})].$$

PREUVE. $\mathbf{1}_{S_T > K} = -\partial_K [(S_T - K)_+]$, ce qui induit par AOA la même relation sur les prix à toute date intermédiaire. $\square$

Formules de symétrie call/put

Idée : payoff $(S - K)_+ =$

- a) Call avec strike K et sous-jacent initial S ?
- b) Put avec strike S et sous-jacent initial K ?

On note $\boxed{\nu = r - q}$ (appelé le **cout de portage**).

Lemme.

1. **Symétrie Call-Put.** On a

$$\text{Call}(t, xe^{-\nu(T-t)}, T, K) = \text{Put}(t, Ke^{-\nu(T-t)}, T, x).$$

2. **Homogénéité des fonctions prix.** Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\text{Call}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \text{Call}(t, x, T, K) \quad \text{et} \quad \text{Put}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \text{Put}(t, x, T, K).$$

III.2 OPTIONS BARRIÈRE

Contrats très courants sur les changes.

- Un *Down-In Call (DIC)* donne le droit à son détenteur d'acheter le titre en T au prix K (*Call*) et **son droit est activé** seulement si le titre descend (*In*) en dessous d'une barrière basse D (*Down*) pendant la durée de vie du contrat. Son exercice revient à recevoir un flux égal à $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_D \leq T}$ où $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq D\}$.
- C'est un *Down-Out Call (DOC)* si la clause d'activation est de ne pas descendre en dessous de D (**l'option est alors désactivée**) : le payoff vaut alors $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau_D}$.
- Le contrat devient *Up-In Call (UIC)* si le titre doit franchir une barrière haute U (*Up*), avec pour flux équivalent $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_U \leq T}$ où $\tau_U = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq U\}$.
- En combinant les Up/Down, In/Out, Call/Put, 8 variantes.

Relation d'AOA :

$$\text{DOC}_t + \text{DIC}_t = \text{Call}_t.$$

- Une autre manière de classer les options barrière consiste à regarder leur payoff à la barrière.
 1. Si celui-ci est nul, ce sont des options barrière dite *regular*. C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec $K \geq D$.
 2. Si celui-ci est non nul, elles sont de type *reverse*. C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec $K < D$.

Option barrière **difficile à couvrir** : le cas *regular* est mieux que le cas *reverse*.

Répliquations statiques et semi-statiques à l'aide de call/put :

- P. Carr, K. Ellis, and V. Gupta. Static hedging of path dependent options. *Journal of Finance*, 53 :1165-1190, 1998.
- N. El Karoui and M. Jeanblanc. Options exotiques. *Finance*, pages 49-67, 1999.
- L. Andersen, J. Andreasen, and D. Eliezer. Static replication of barrier options : some general results. *Journal of Computational Finance*, 5(4) :1-25, 2002.
- J. Maruhn and E. Sachs. Robust static hedging of barrier options in stochastic volatility models. *Mathematical Methods of Operations Research*, 70(13) :405-433, 2009.
- P. Carr and S. Nadtochiy. Static hedging under time-homogeneous diffusions. *SIAM Journal of Financial Mathematics*, pages 794-838, 2011.

EDP et espérance risque-neutre**Théorème (Prix des options barrière : EDP et espérance**

risque-neutre). Considérons une option barrière Down-Out-Call (DOC) de payoff $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_D > T}$ sur un titre S log-normal de tendance μ , de volatilité σ et versant un dividende au taux q .

1) EDP. Le prix à l'instant t du contrat est donné par $V_t = v(t \wedge \tau_D, S_{t \wedge \tau_D}) = \mathbf{1}_{t < \tau_D} v(t, S_t)$ où v est solution de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + (r - q) x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - r v(t, x) = 0, & t \in [0, T], x \geq D \\ v(T, x) = (x - K)_+, & x > D \\ v(t, x) = 0, & t \in [0, T], x \leq D. \end{cases}$$

L'option est couverte par l'achat de $\delta(t) = \mathbf{1}_{t < \tau_D} v'_x(t, S_t)$ titres S .

2) Valorisation risque-neutre. La solution de l'EDP d'évaluation du DOC est donnée par $v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau_D} | S_t = x]$ où $\tau_D = \inf\{s \geq t : S_s \leq D\}$ et où le drift de S sous $\mathbb{Q}$ est $r - q$.

Calcul explicite des prix

à l'aide du paramètre $\gamma = 1 - \frac{2\nu}{\sigma^2}$ où $\nu = r - q$.

Théorème (DIC regular ($D \leq K$) dans le cas $r = q$ ($\gamma = 1$)).

1. Si $x \leq D$, l'option est activée immédiatement et se transforme en Call :

$$\text{DIC}(\mathbf{t}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) = \text{Call}(\mathbf{t}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}).$$

Réplication statique : acheter un Call de caractéristiques (T, K) .

2. Si $x > D$, on a

$$\text{DIC}(\mathbf{t}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{D}} \text{Put}(\mathbf{t}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{K}}) = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{D}} \text{Call}(\mathbf{t}, \frac{\mathbf{D}^2}{\mathbf{K}}; \mathbf{T}, \mathbf{x}) = \text{Call}(\mathbf{t}, \mathbf{D}; \mathbf{T}, \frac{\mathbf{K}\mathbf{x}}{\mathbf{D}}).$$

Couverture semi-statique :

- 1) tant que $S_u > D$, acheter $\frac{K}{D}$ Puts de caractéristiques $(T, \frac{D^2}{K})$,
- 2) à l'instant où l'option est activée, acheter un Call de caractéristiques (T, K) .

Prix des DIC regular ($D \leq K$) dans le cas général

- Si $x \leq D$, activation immédiate et le DIC est équivalent à un Call.
- Si $x > D$, valorisation va passer par celle des BinDIC, de payoff $\mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D}$.
En effet, $\mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} = -\partial_K [(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T \geq \tau_D}]$.

▮ par AOA :

$$\begin{aligned} \text{BinDIC}(\mathbf{0}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} \mid S_0 = x \right] \\ &= -\partial_K \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} \mid S_0 = x \right] = -\partial_{\mathbf{K}} \text{DIC}(\mathbf{0}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Théorème (cas $x > D$). Considérons les fonctions prix du BinDIC et DIC regular ($D \leq K$). On a

$$\begin{aligned} \text{BinDIC}(\mathbf{t}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) &= \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{D}} \right)^{\gamma} \text{BinC}(\mathbf{t}, \mathbf{D}; \mathbf{T}, \frac{\mathbf{K}\mathbf{x}}{\mathbf{D}}), \\ \text{DIC}(\mathbf{t}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) &= \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{D}} \right)^{\gamma-1} \text{Call}(\mathbf{t}, \mathbf{D}; \mathbf{T}, \frac{\mathbf{K}\mathbf{x}}{\mathbf{D}}). \end{aligned}$$

Prix des DIC reverse ($D > K$)

Il reste à donner les formules dans le cas *reverse* pour $x > D$.

Théorème. Considérons les fonctions prix du DIC et BinDIC reverse ($D > K$).
Pour $x > D$, on a

$$\begin{aligned} \text{BinDIC}(t, x; T, K; D) &= \text{BinC}(t, x; T, K) - e^{-r(T-t)} \\ &\quad + \text{BinP}(t, x; T, D) + \text{BinDIC}(t, x; T, D; D), \\ \text{DIC}(t, x; T, K; D) &= \text{Call}(t, x; T, K) - \text{Call}(t, x; T, D) - (D - K)\text{BinC}(t, x; T, D) \\ &\quad + \text{DIC}(t, x; T, D; D) + (D - K)\text{BinDIC}(t, x; T, D; D). \end{aligned}$$

PREUVE. Ecrire l'égalité des flux à maturité et appliquer l'AOA. □

 Toutes ces formules de répliquations statiques et semi-statiques dépendent de γ qui dépend de σ ... encadrements de prix possibles si bornes sur σ .

III.3 DELTA-HEDGING À TEMPS DISCRET

- La réplication parfaite sans risque résiduel suppose (entre autres) le rebalancement en temps continu du portefeuille $\Rightarrow$ Impossible en pratique
- Rebalancement à temps discret : si la fréquence est grande, l'erreur de couverture (**tracking error**) "doit" être petite (si l'on connaît le modèle^a).

Voir démo sur feuille excel.

- Dans quel sens ?
- Impact des dates de rebalancement : régulières ou adaptatives au marché ?
- Impact des payoffs irréguliers ?

a. voir plus tard pour l'erreur de modèle

Quelques résultats sur les intégrales stochastiques

Définition. Un intégrande est simple si

- $g_s = g_{t_i}$ if $s \in]t_i, t_{i+1}]$,
- g_{t_i} dépend seulement de W avant t_i ,
- g est de carré intégrable, $\mathbb{E}(\int_0^T |g_s|^2 ds) < +\infty$.

On pose alors
$$\int_0^t g_s dW_s = \sum_{t_i \leq t} g_{t_i} (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t_i}).$$



on prend g_{t_i} (valeur à gauche de l'intervalle et non à droite).

Proposition (1er et 2ème moments). L'intégrale stochastique $\int_0^t g_s dW_s$ vérifie

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t g_s dW_s\right) = 0, \quad \mathbb{E}\left|\int_0^t g_s dW_s\right|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^t g_s^2 ds\right).$$

➡ **Relation d'isométrie** entre l'intégrale stochastique dans $L_2(\mathbb{P})$ et les intégrandes dans $L_2(dt \otimes d\mathbb{P})$ ➡ Extension à tous les intégrandes adaptés, continus, de carré intégrable ... (voir cours de calcul sto).

Couverture discrète en Δ

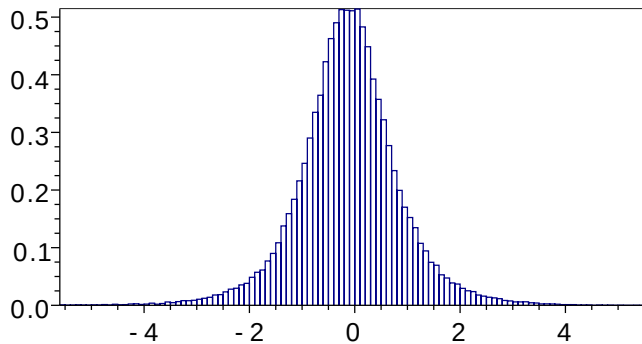
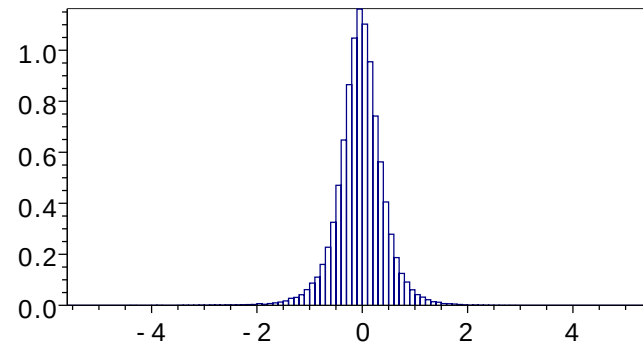
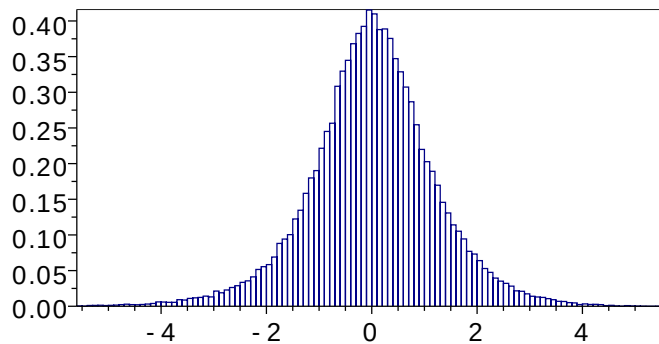
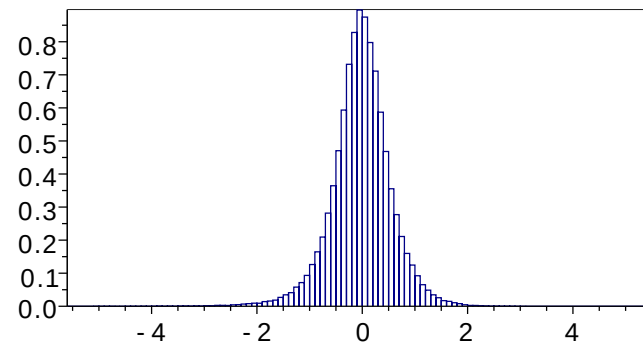
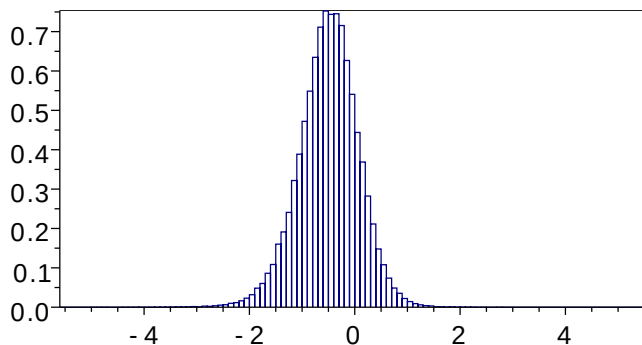
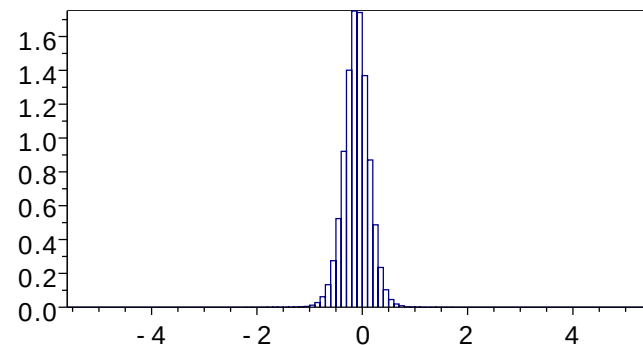
Cas du call : $\delta(t) = \text{Call}'_x(t, S_t) = \mathcal{N}(d_1(t, S_t, K))$.

Dates de rebalancement : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$



- $\delta_t = \text{Call}'_x(t_i, S_{t_i})$ pour $t \in]t_i, t_{i+1}]$.
- Portfeuille résultant : V_T^N .
- Tracking error : $\varepsilon_T^N = V_T^N - (S_T - K)_+$.

Théorème. $\mathbb{E}(|\varepsilon_T^N|^2) \sim \mathbf{C}/\mathbf{N}$ qd $N \rightarrow +\infty$.

Erreur de couverture avec N=52 dates ($\mu < r$)Erreur de couverture avec N=252 dates ($\mu < r$)Erreur de couverture avec N=52 dates ($\mu = r$)Erreur de couverture avec N=252 dates ($\mu = r$)Erreur de couverture avec N=52 dates ($\mu > r$)Erreur de couverture avec N=252 dates ($\mu > r$)

Distributions des erreurs de couverture avec re-balancement hebdomadaire (gauche) ou quotidien (droite). Influence du rendement du titre μ (1ère ligne : $\mu = -30\% \ll r$, 2ème ligne $\mu = r$, 3ème ligne $\mu = 30\% \gg r$). Paramètres : $S_0 = K = 100$, $\sigma = 25\%$, $r = 2\%$ et $T = 1$ an.

III.4 COUVERTURE EN DELTA-GAMMA À TEMPS DISCRET



Unicité des prix mais pas unicité de la couverture.

Pour simplifier, pas de dividende : $V_t = v(t, S_t)$ et

$$d(e^{-rt}V_t) = v'_S(t, S_t)d(e^{-rt}S_t).$$

Autre actif négociable écrit sur S (ex : option) : $C_t = C(t, S_t)$ et

$$d(e^{-rt}C_t) = C'_S(t, S_t)d(e^{-rt}S_t).$$

Autre couverture : pour tout α_t (satisfaisant conditions techniques)

$$d(e^{-rt}\tilde{V}_t) = v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)d(e^{-rt}S_t) + \alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}d(e^{-rt}C_t),$$

s'interprète comme à la date t la détention de

- i) $v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)$ actifs S ,
- ii) $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}$ options C .

Quel choix de α ?

- i) en temps continu, tous les choix fonctionnent.
- ii) en temps discret, un choix de α rend plus petit la tracking error qd N grand.

Matching des Gammas de l'option et du portefeuille de couverture

(insensibilité aux variations d'ordre 2 en S)

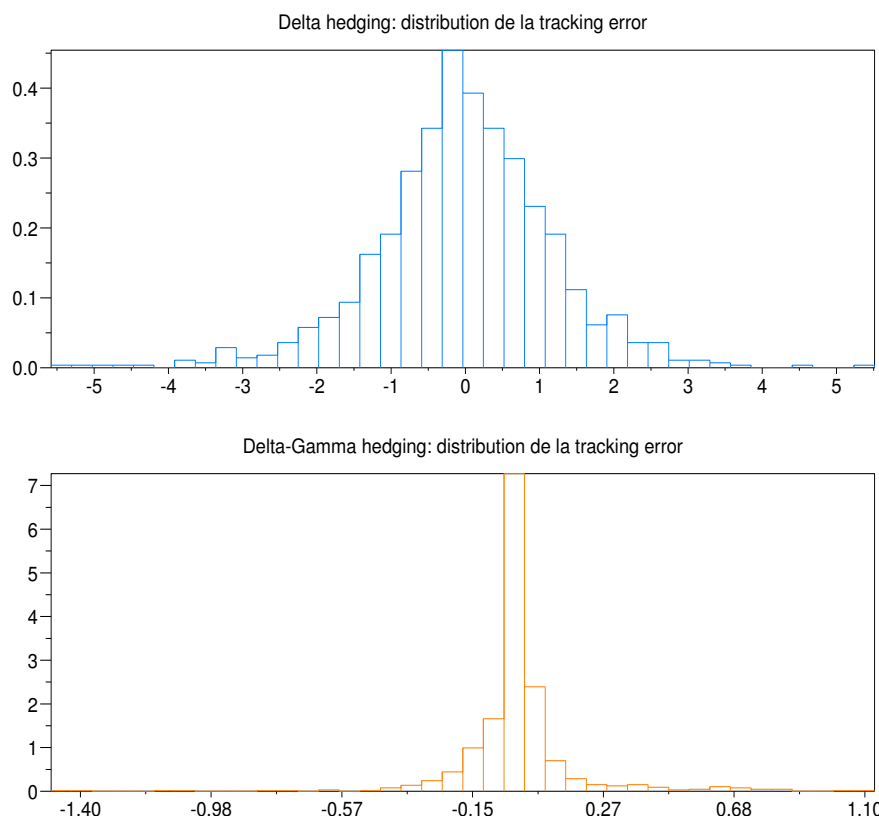
	option $V_t = v(t, S_t)$	portefeuille de couverture $\tilde{V}$
composition	$v'_S(t, S_t)$ titres S	$v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)$ actifs S et $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}$ actifs C
delta % S	$v'_S(t, S_t)$	$v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t) + \alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)} C'_S(t, S_t)$
gamma % S	$v''_{SS}(t, S_t)$	$\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)} C''_{SS}(t, S_t)$

⇒ Nombre d'options : $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)} = \frac{v''_{SS}(t, S_t)}{C''_{SS}(t, S_t)}$ = ratio des gammas.

Exemple. Option supplémentaire : Call (T_2, K) de maturité plus longue.

Paramètres : $T_1 = 12M$, $T_2 = 15M$, $K = 100$, $r = 2\%$, $\mu = 1\%$, $S_0 = 100$, $\sigma = 25\%$.

Pour un rebalancement hebdomadaire, distribution empirique des tracking errors :



Erreur quadratique

	hebdo.	quotid.
Δ hedging	1.25	0.566
$\Delta - \Gamma$ hedging	0.222	0.0567

Tracking error $\sim$
 { $\sqrt{\text{pas trading}}$ si Δ hedge,
 pas trading si $\Delta - \Gamma$ hedge.



Tout ceci repose fortement sur l'hypothèse de "connaissance parfaite du modèle de prix" (irréaliste en pratique)