Chapitre 9

Au delà des options d'achat et de vente

Nous présentons dans ce chapitre quelques morceaux choisis en mathématiques financières, allant des options exotiques jusqu'au risque de crédit en passant par les taux d'intérêt. Là encore, nous privilégions des modélisations à partir du mouvement brownien et nous aboutissons à des formules fermées pour le prix et couverture de produits associés.

9.1 Options barrières

9.1.1 Introduction

Les options barrières (*barrier options*) sont des exemples très standards d'options exotiques, c'est-à-dire des contrats financiers dont le flux à échéance dépend de toute la trajectoire du cours du titre entre aujourd'hui et l'échéance. Ces options sont aussi connues sous le nom d'options à déclenchement (*trigger options*). Ces options OTC sont très liquides sur le marché des changes, car les intervenants s'appuient sur l'analyse technique (introduisant des niveaux de support et de résistance, i.e. les barrières) pour développer des anticipations.

- Un *Down-In Call (DIC)* donne le droit à son détenteur d'acheter le titre en T au prix K (*Call*) et **son droit est activé** seulement si le titre franchit (*In*) une barrière basse D (*Down*) pendant la durée de vie du contrat. Son exercice revient à recevoir un flux égal à $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_D \leq T}$ où $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq D\}$.
- C'est un *Down-Out Call (DOC)* si la clause d'activation est de ne pas descendre en dessous de D (**l'option est alors désactivée**) : le payoff vaut alors $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau_D}$.
- Le contrat devient *Up-In Call (UIC)* si le titre doit franchir une barrière haute U (*Up*), avec pour flux équivalent $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_U \leq T}$ où $\tau_U = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq U\}$.
- En combinant les Up/Down, In/Out, Call/Put, on obtient ainsi 8 variantes. On considèrera aussi des options barrières binaires. Par exemple, un *Binary Down-In Call*

(BinDIC) a pour flux $\mathbf{1}_{S_T \geq K}\mathbf{1}_{\tau_D \leq T}$.
- Parfois, pour les options à barrière désactivante, une prime est versée en compensation, on parle d'option barrière avec *rebate.*
- Enfin, au lieu de constater en temps continu le franchissement de la barrière, cela peut être fait seulement à certaines dates de fixing. Ces options barrières *discrètes* ne bénéficient pas de formules fermées comme leurs analogues continues dans le modèle de Black-Scholes. Dans la suite du chapitre, nous considérons seulement le cas continu.

Une autre manière de classer les options barrières consiste à regarder leur payoff à la barrière.

1. Si celui-ci est nul, ce sont des options barrières dite *regular.* C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec $K \geq D$.
2. Si celui-ci est non nul, elles sont de type *reverse.* C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec $K < D$.

Les options barrières sont des contrats difficiles à couvrir en général, car près de la barrière et de l'échéance, on ne sait pas si le droit va être activé ou pas, et selon les cas, les flux à court terme sont très différents. Dans le cas *reverse*, on peut montrer que le Δ de l'option peut tendre vers l'infini (! !), ce qui est très délicat en pratique. Le cas *regular* est plus simple car le Δ reste borné.

Les options barrières sont moins chères que les Calls et Puts équivalents sans barrière, car il y a une clause supplémentaire d'activation ou de désactivation.

Pour la valorisation, il est équivalent de valoriser un In ou un Out avec mêmes caractéristiques : en effet, comme $(S_T - K)_+\mathbf{1}_{\tau \leq T} + (S_T - K)_+\mathbf{1}_{T<\tau} = (S_T - K)_+$, par AOA les prix en t sont liés par la même relation en faisant intervenir celui d'un Call :

$$\mathrm{DOC}_t + \mathrm{DIC}_t = \mathrm{Call}_t. \tag{9.1.1}$$

Dans la suite, nous donnons des prix explicites à ces options. C'est beaucoup plus délicat que dans le cas des Calls et Puts, car le payoff dépend non seulement de S_T mais aussi du franchissement ou non de la barrière... Nous autorisons le titre à verser un dividende continu.

9.1.2 EDP et espérance risque-neutre

Théorème 9.1.1 (Prix des options barrières : EDP et espérance risque-neutre) *Considérons une option barrière Down-Out-Call (DOC) de payoff* $(S_T - K)_+\mathbf{1}_{\tau_D > T}$ *sur un titre* S *log-normal de tendance* μ*, de volatilité* σ *et versant un dividende au taux* q*.*

1) EDP. *Le prix à l'instant* t *du contrat est donné* $V_t = \mathbf{1}_{t<\tau_D} v(t, S_t)$ *où* v *est solution de l'EDP*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, v''_{xx}(t,x) + (r-q)\, x\, v'_x(t,x) + v'_t(t,x) - rv(t,x) = 0, & t \in [0,T], x \geq D, \\ v(T,x) = (x-K)_+, & x > D, \\ v(t,x) = 0, & t \in [0,T], x \leq D. \end{cases}$$

L'option est couverte par l'achat de $\delta(t) = \mathbf{1}_{t<\tau_D} v'_x(t, S_t)$ *titres* S*.*

2) Valorisation risque-neutre. *Notons* $\mathbb{Q}$ *la probabilité risque-neutre équivalent à* $\mathbb{P}$*, sous laquelle le titre* $(S_t)_t$ *a pour dynamique :*

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)dt + \sigma dW_t, \tag{9.1.2}$$

(avec W un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien). Alors la solution de l'EDP d'évaluation du DOC est donnée par

$$v(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T<\tau_D} | S_t = x\big]$$

où $\tau_D = \inf\{s \geq t : S_s \leq D\}$.

Preuve :

Voir exercice 9.4. □

Par la relation d'arbitrage (9.1.1), on déduit que le prix d'une DIC à l'instant 0 est

$$\mathrm{DIC}(0,x,T,K,D) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[e^{-rT}(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T\geq\tau_D} | S_0 = x\big]. \tag{9.1.3}$$

Nous nous intéresserons aussi à son analogue digitale, la BinDIC dont le payoff est $\mathbf{1}_{S_T>K}\mathbf{1}_{T\geq\tau_D}$. Remarquons que

$$\mathbf{1}_{S_T>K}\mathbf{1}_{T\geq\tau_D} = -\partial_K\left[(S_T - K)_+\mathbf{1}_{T\geq\tau_D}\right],$$

ce qui induit par AOA la même relation sur les prix à toute date intermédiaire, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathrm{BinDIC}(0,x,T,K,D) &= -\partial_K \mathrm{DIC}(0,x,T,K,D) && (9.1.4)\\
&= -\partial_K \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[e^{-rT}(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T\geq\tau_D} | S_0 = x\big] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[e^{-rT}\mathbf{1}_{S_T>K}\mathbf{1}_{T\geq\tau_D} | S_0 = x\big]. && (9.1.5)
\end{aligned}$$

Le même raisonnement tient aussi pour les Call/Put binaires de payoff $\mathbf{1}_{S_T>K}$ et $\mathbf{1}_{S_T<K}$:

$$\mathrm{BinC}(0,x,T,K) = -\partial_K \mathrm{Call}(0,x,T,K) = e^{-rT}\mathcal{N}\left[d_0(T, xe^{(r-q)T}, K)\right]. \tag{9.1.6}$$

$$\mathrm{BinP}(0,x,T,K) = \partial_K \mathrm{Put}(0,x,T,K) = e^{-rT}\mathcal{N}[d_1(T, K, xe^{(r-q)T})]. \tag{9.1.7}$$

Dans la suite, nous déterminons des formules fermées pour les prix de DIC et BinDIC. Par AOA, on peut directement déduire celles pour les UICet BinUIC de mêmes caractéristiques. Des formules analogues existent pour les autres options barrières. Les résultats s'expriment en fonction de prix de Call/Put standard et d'un paramètre γ donné par

$$\boxed{\gamma = 1 - \frac{2\nu}{\sigma^2} \text{ où } \nu = r - q.} \tag{9.1.8}$$

Il y a deux approches pour obtenir des formules fermées.

1. Calculer l'espérance sous $\mathbb{Q}$ du payoff qui dépend de $S_T = xe^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T}$ et $\{\tau_D \leq T\} = \{\min_{t\in T} S_t \leq D\} = \{xe^{\min_{t\in T}[(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t]} \leq D\}$. Ainsi, on voit que la connaissance de la loi jointe de $((r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T, \min_{t\in T}[(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t])$ devrait permettre (après un calcul d'intégrale double) d'obtenir des formules explicites (comme pour le Call standard). Dans le cas où $r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$, cette loi jointe est reliée directement à celle de la valeur en T d'un brownien standard et son minimum sur l'intervalle. Nous l'avons obtenue par le principe de symétrie au chapitre 1. Dans le cas $r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \neq 0$, il faut en plus faire un changement de dérive/changement de probabilité via le théorème de Cameron-Martin. Ces calculs sont possibles, mais ils sont longs et fastidieux. Nous renvoyons par exemple à [29].

2. Notre présentation suit de près celle de [8], qui exploite des formules de symétrie sur les barrières, développées initialement par Carr, Ellis et Gupta [4].

Au préalable, nous commençons par énoncer quelques propriétés simples des Calls et Puts standards, propriétés qu'il est facile de justifier à partir des formules fermées.

Lemme 9.1.2 (Propriétés simples des Call/Put standard)

1. **Symétrie Call-Put.** *On a*

$$\mathrm{Call}(t, xe^{-\nu(T-t)}, T, K) = \mathrm{Put}(t, Ke^{-\nu(T-t)}, T, x). \tag{9.1.9}$$

2. **Homogénéité des fonctions prix.** *Pour tout* $\lambda > 0$*, on a*

$$\mathrm{Call}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \mathrm{Call}(t, x, T, K) \quad \text{et} \quad \mathrm{Put}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \mathrm{Put}(t, x, T, K). \tag{9.1.10}$$

9.1.3 Prix des DIC regular ($D \leq K$) dans le cas $\gamma = 1$ ($r = q$)

Proposition 9.1.3 *Considérons la fonction prix du DIC regular ($D \leq K$) dans le cas $r = q$.*

1. Si $x \leq D$, l'option est activée immédiatement et se transforme en Call :

$$\mathrm{DIC}(t, x, T, K, D) = \mathrm{Call}(t, x, T, K).$$

La réplication est statique et consiste à acheter un Call de caractéristiques (T, K).

2. Si $x > D$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{DIC}(t, x, T, K, D) &= \frac{K}{D}\mathrm{Put}\big(t, x, T, \frac{D^2}{K}\big) \\ &= \frac{K}{D}\mathrm{Call}\big(t, \frac{D^2}{K}, T, x\big) = \mathrm{Call}\big(t, D, T, \frac{Kx}{D}\big).\end{aligned} \tag{9.1.11}$$

La couverture consiste (tant que $S_u > D$) à l'achat de $\frac{K}{D}$ Puts de caractéristiques $(T, \frac{D^2}{K})$, puis à l'instant où l'option est activée, à l'achat d'un Call de caractéristiques (T, K).

Preuve :

Le cas 1) est clair. Pour le cas 2), il faut vérifier que la stratégie indiquée couvre bien le DIC dans tous les scénarii de marché possibles.

- *Le titre n'atteint pas la barrière D avant T.* Nous conservons les $\frac{K}{D}$ Puts de caractéristiques $(T, \frac{D^2}{K})$ jusqu'à échéance : leur payoff terminal vaut $(\frac{D^2}{K} - S_T)_+$. Cette quantité est nulle car S_T est nécessairement au dessus de D et $\frac{D}{K} \leq 1$. Cela couvre bien le DIC dans ce cas.
- *Le titre atteint la barrière D à l'instant τ_D avant T.* Nous conservons les $\frac{K}{D}$ Puts jusqu'à cet instant τ_D (où $S_{\tau_D} = D$), et achetons un Call de caractéristiques (T, K). C'est possible de le faire de manière autofinançante car à cet instant, la valeur liquidative du portefeuille vaut

$$\frac{K}{D}\mathrm{Put}\big(\tau_D, D, T, \frac{D^2}{K}\big) = \mathrm{Put}\big(\tau_D, K, T, D\big) = \mathrm{Call}\big(\tau_D, D, T, K\big)$$

en utilisant le lemme 9.1.2. A échéance, on a bien alors un Call comme requis.

Les différentes formules (9.1.11) pour $\mathrm{DIC}(t, x, T, K, D)$ sont basées sur la symétrie Call-Put et l'homogénéité. □

9.1.4 Prix des DIC regular ($D \leq K$) dans le cas général

Lorsque l'option est activée immédiatement ($x \leq D$), le DIC est équivalent à un Call, il n'y a donc rien de plus à justifier par rapport à avant.

Pour $x > D$, c'est différent et modifié ainsi.

Proposition 9.1.4 *Considérons les fonctions prix du DIC et BinDIC regular ($D \leq K$). Pour $x > D$, on a*

$$\mathrm{DIC}(t, x, T, K, D) = \big(\frac{x}{D}\big)^{\gamma-1}\mathrm{Call}\big(t, D, T, \frac{Kx}{D}\big),$$
$$\mathrm{BinDIC}(t, x, T, K, D) = \big(\frac{x}{D}\big)^{\gamma}\mathrm{BinC}\big(t, D, T, \frac{Kx}{D}\big).$$

On rappelle que les formules fermées pour les prix des Calls binaires BinC sont donnés en (9.1.6).

Preuve :

On montre les formules en $t = 0$. L'idée est de se ramener au cas sans coût de portage ($\nu = 0$) par un changement de variable.

On commence par les BinDIC. Supposons d'abord que $\gamma > 0$. Comme $(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2) = -\frac{\gamma\sigma^2}{2}$, on remarque que

$$M_t = S_t^\gamma = x^\gamma e^{((r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)\gamma t + \gamma\sigma W_t} = M_0 e^{-\frac{1}{2}(\gamma\sigma)^2 t + \gamma\sigma W_t}.$$

$(M_t)_t$ a la loi d'un titre sans coût de portage, avec volatilité $\gamma\sigma$. Notons avec un exposant M les prix d'option écrite sur ce titre (fictif). Etant données les règles de valorisation sous espérance risque-neutre (9.1.5) et (9.1.6), le prix d'un BinDIC (resp. d'un BinC) avec caractéristiques (T, K, D) sur S est le même qu'un BinDIC (resp. d'un BinC) avec caractéristiques (T, K^γ, D^γ) sur $M = S^\gamma$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{BinDIC}(0, x, T, K, D) &= \mathrm{BinDIC}^M(0, x^\gamma, T, K^\gamma, D^\gamma) \\
&= -\partial_k \mathrm{DIC}^M(0, x^\gamma, T, k, D^\gamma)\big|_{k=K^\gamma} \quad \text{(égalité (9.1.4))} \\
&= -\partial_k \mathrm{Call}^M(0, D^\gamma, T, \frac{kx^\gamma}{D^\gamma})\big|_{k=K^\gamma} \quad \text{(égalité (9.1.11))} \\
&= \frac{x^\gamma}{D^\gamma}\mathrm{BinC}^M(0, D^\gamma, T, \frac{K^\gamma x^\gamma}{D^\gamma}) \quad \text{(égalité (9.1.6))} \\
&= \frac{x^\gamma}{D^\gamma}\mathrm{BinC}(0, D, T, \frac{Kx}{D}).
\end{aligned}$$

Si $\gamma < 0$, le raisonnement est analogue mais on passe par une option BinUIP sur M. Enfin, le cas $\gamma = 0$ est obtenu comme limite des formules lorsque $\gamma \to 0$.

On déduit maintenant le prix du DIC. En comparant (9.1.3) et (9.1.5), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{DIC}(0,x,T,K,D) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[e^{-rT}(S_T-K)_+\mathbf{1}_{T\geq\tau_D}\big] = \int_K^\infty \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[e^{-rT}\mathbf{1}_{S_T>k}\mathbf{1}_{T\geq\tau_D}\big]dk \\
&= \int_K^\infty \mathrm{BinDIC}(0,x,T,k,D)dk \\
&= \int_K^\infty \big(\frac{x}{D}\big)^{\gamma}\mathrm{BinC}\big(0,D,T,\frac{kx}{D}\big)dk = \big(\frac{x}{D}\big)^{\gamma-1}\mathrm{Call}\big(0,D,T,\frac{Kx}{D}\big).
\end{aligned}$$

□

9.1.5 Prix des DIC reverse ($D > K$)

Il reste à donner les formules dans le cas *reverse* pour $x > D$.

Proposition 9.1.5 *Considérons les fonctions prix du DIC et BinDIC reverse ($D > K$). Pour $x > D$, on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{BinDIC}(t,x,T,K,D) &= \mathrm{BinC}(t,x,T,K) - e^{-r(T-t)} \\
&\quad + \mathrm{BinP}(t,x,T,D) + \mathrm{BinDIC}(t,x,T,D,D), \\
\mathrm{DIC}(t,x,T,K,D) &= \mathrm{Call}(t,x,T,K) - \mathrm{Call}(t,x,T,D) - (D-K)\mathrm{BinC}(t,x,T,D) \\
&\quad + \mathrm{DIC}(t,x,T,D,D) + (D-K)\mathrm{BinDIC}(t,x,T,D,D).
\end{aligned}$$

Les options barrières à droite de l'égalité sont de type *regular*, on connaît donc leur prix sous forme fermée.

PREUVE :

Il s'agit de décomposer le payoff terminal avec des options binaires et barrières regular seulement. Une vérification (simple mais fastidieuse) montre que

$$\mathbf{1}_{S_T>K}\mathbf{1}_{T\geq\tau_D} = \mathbf{1}_{S_T>K} - 1 + \mathbf{1}_{S_T<D} + \mathbf{1}_{S_T>D}\mathbf{1}_{T\geq\tau_D}.$$

Par AOA, les prix associés en t sont égaux aussi. Pour le DIC, on applique le même type de décomposition des payoffs. □

9.2 Taux d'intérêt : modèle de Vasicek

Nous donnons dans ce paragraphe une brève introduction à la modélisation stochastique des taux d'intérêt.

Les instruments de base sont les obligations zéro-coupon de diverses échéances T. Nous relions la modélisation de leur dynamique à celle du taux d'intérêt court terme $(r_t)_t$ (ou **taux spot**). Nous détaillons le modèle de Vasicek [32] pour celui-ci, puis son extension moderne (modèle de Hull & White). Dans la rubrique POUR EN SAVOIR PLUS, nous abordons la question de la valorisation des Calls sur zéro-coupon.